



Universidades Lusíada

Fernandes, Carla Filipa de Freitas Lopes

Modelos matemáticos em competição mista

<http://hdl.handle.net/11067/490>

Metadados

Data de Publicação	2013-10-11
Resumo	O objectivo desta dissertação é estudar uma aplicação da Teoria dos Jogos à modelização matemática de alguns tipos de mercados. Há dois ramos distintos da Teoria dos Jogos: teoria dos jogos cooperativos e teoria dos jogos não-cooperativos. Este trabalho enquadra-se na teoria dos jogos não cooperativos em que cada jogador escolhe a sua estratégia tendo em conta os seus próprios interesses, isto é, cada um escolhe aquilo que pensa ser o «melhor» para si próprio. Um dos principais conceitos na teor...
Palavras Chave	Modelos matemáticos, Teoria dos jogos
Tipo	masterThesis
Revisão de Pares	Não
Coleções	[ULL-FCEE] Dissertações

Esta página foi gerada automaticamente em 2024-05-02T23:18:59Z com informação proveniente do Repositório



UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Modelos Matemáticos em Competição Mista

Carla Filipa de Freitas Lopes Fernandes

Tese para obtenção do Grau de Mestre

Lisboa - 2010



UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Modelos Matemáticos em Competição Mista

Carla Filipa de Freitas Lopes Fernandes

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre

Lisboa – 2010

Orientadora: Prof. Doutora Fernanda Amélia Fernandes Ferreira

AGRADECIMENTOS

É com muita satisfação que expresso aqui o mais profundo agradecimento a todos aqueles que tornaram a realização deste trabalho possível.

Gostaria antes de mais de agradecer à Prof. Doutora Fernanda Amélia Fernandes Ferreira, orientadora desta tese, pelo apoio, incentivo e disponibilidade demonstrada em todas as fases que levaram à concretização deste trabalho.

Gostaria ainda de agradecer:

Ao Prof. Flávio Ferreira pelos comentários, sugestões e incentivo.

Ao meu marido, à minha filha e à minha mãe pelo incentivo e compreensão recebido ao longo deste percurso.

ÍNDICE

	Páginas
Índice de Figuras	6
Índice de Tabelas	7
Lista de abreviaturas	10
1. Introdução	11
Contextualização Histórica	11
Modelos Económicos	14
Preliminares	15
Estrutura da dissertação	20
2. Aplicação da teoria de jogos num mercado de duopólio	21
2.1. Introdução	21
2.2. Modelo de Cournot	21
2.3. Modelo de Stackelberg	24
2.4. Conclusão	28
3. Modelo de Duopólio de Cournot em Competição Internacional	29
3.1. Introdução	29
3.2. O modelo e os resultados	29
3.3. Conclusão	34
4. Modelo de Duopólio de Stackelberg em Competição Internacional	35
4.1. Introdução	35
4.2. O modelo e os resultados	35
4.3. Conclusão	41
5. Modelo de Stackelberg com um Crescimento Δa na procura	42
5.1. Introdução	42
5.2. Modelo de Oligopólio de Stackelberg	42

5.3. Conclusão	49
6. Políticas Ambientais em Competição Internacional	50
6.1. Introdução	50
6.2. O Modelo	51
6.3. Análise Estática	55
6.4. Um Exemplo Numérico	65
6.5. Conclusão	66
7. Impacto do bem-estar social de uma empresa sem fins lucrativos num mercado misto	67
7.1. Introdução	67
7.2. Modelo de Cournot com empresa sem fins lucrativos, empresas privadas e empresas pública	68
7.3. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos e uma empresa privada	70
7.4. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos e uma empresa pública	72
7.5. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos, uma empresa privada e uma empresa pública	74
7.6. Conclusão	76
8. Conclusão	77
9. Bibliografia	79

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Representação geométrica do equilíbrio de Cournot-Nash	23
Figura 2: Representação geométrica do equilíbrio de Stackelberg	27
Figura 3: Estratégias possíveis seguidamente da expansão da procura	45
Figura 4: Comportamento do lucro da empresa E_1 em função de Δa	48
Figura 5: Flutuação do preço em função da quantidade procurada	48

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Tabela exemplificativa do Dilema dos Prisioneiros	18
Tabela 2: Implicações do aumento do valor marginal dos danos ambientais	65
Tabela 3: Implicações do aumento do valor marginal dos danos ambientais (continuação)	65

RESUMO

O objectivo desta dissertação é estudar uma aplicação da Teoria dos Jogos à modelização matemática de alguns tipos de mercados.

Há dois ramos distintos da Teoria dos Jogos: teoria dos jogos cooperativos e teoria dos jogos não-cooperativos. Este trabalho enquadra-se na teoria dos jogos não cooperativos em que cada jogador escolhe a sua estratégia tendo em conta os seus próprios interesses, isto é, cada um escolhe aquilo que pensa ser o «melhor» para si próprio. Um dos principais conceitos na teoria dos jogos não cooperativos é o equilíbrio de Nash, frequentemente utilizado para solução do jogo. Ao nível da Organização Industrial e Economia, a Teoria dos Jogos é usada em modelos para analisar o comportamento das empresas no mercado.

Neste trabalho, considerando por base dois modelos clássicos da Teoria dos Jogos / Organização Industrial, modelo de Cournot e modelo de Stackelberg, estudamos mercados com determinadas características. O modelo de Cournot consiste em duas empresas, únicas produtoras de um determinado produto, decidirem, simultaneamente e sem comunicação entre si, a quantidade a produzir. No modelo de Stackelberg, em que as variáveis de decisão também são as quantidades, existe a diferença de que, relativamente ao modelo de Cournot, ao invés de decidirem simultaneamente, as empresas decidem uma após a outra: Existe uma empresa líder, que decide em primeiro lugar, e uma empresa seguidora que toma a sua decisão tendo como um dado a decisão da primeira.

De entre os modelos matemáticos que estudamos, são caracterizados mercados internacionais, com pagamentos de taxas de exportação; mercados em países com políticas efectivas de preservação ambiental, em que há lugar ao pagamento de impostos ambientais e taxas para regular a importação; e mercados em que competem empresas privadas, empresas públicas e empresas sem fins lucrativos, a que correspondem diferentes tipos de função objectivo.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to study an application of game theory to the mathematical modeling of some types of market.

There are two distinct branches of game theory: cooperative game theory and the theory of non cooperative games. This work fits into the theory of non cooperative games in which each player chooses his strategy taking into account his own interests, that is, each one chooses what he thinks is the 'best' for himself. One of the key concepts in the theory of non cooperative games is the Nash equilibrium, often used to solve the game. In terms of industrial organization and economics, game theory is used in models to analyze the behavior of firms.

In this work, based on considering two classical models of Game Theory / Industrial Organization, Cournot model and the Stackelberg model, we study markets with certain characteristics. The Cournot model consists of two firms, only producers of a good that decide, simultaneously and without communication between them, the quantity to be produced. In the Stackelberg model, in which the decision variables are also the quantities, the firms decide one after the other, instead of taking decisions simultaneously. So, there is one leader who decides first, and a follower firm that decides taking into account the decision of the leader.

Among the mathematical models we study, we characterize international markets, with payments of export taxes; markets in countries with effective policies for environmental preservation, which is subject to payment of environmental taxes and fees to regulate imports; and mixed markets in which they are private firms, public firms and nonprofits organizations, which correspond to different objective functions.

PALAVRAS-CHAVE:

Teoria de Jogos; Modelo de Cournot; Modelo de Stackelberg; Duopólio misto; Equilíbrio de Nash; Competição internacional; Bem-estar social; Imposto ambiental; Taxas de importação.

1. Introdução

A Teoria dos Jogos estuda situações de conflito e cooperação, nas quais interagem indivíduos racionais, analisando os comportamentos e os resultados esperados, quer mediante decisões individuais (jogos não cooperativos), quer perante acordos entre os jogadores (jogos cooperativos). Utiliza instrumentos de análise (entre eles o equilíbrio de Nash) bastante eficazes e enriquecedores para o estudo de situações de aspecto económico (por exemplo, no estudo de mercados oligopolísticos e licitações públicas, entre outros) e também várias situações de tipo social, político e legal. Nos últimos vinte anos, a Teoria dos Jogos tem vindo a registar uma expansão significativa, para a qual muito contribuiu a entrega do Prémio Nobel da Economia a matemáticos e economistas que desenvolveram os seus estudos tendo por base a Teoria dos Jogos. Assim, em 1994, este galardão distinguiu (confrontando (John Forbes Nash, 1928), (Reinhard Selten, 1930) e (John Harsanyi, 1920-2000)); em 1996, foi atribuído ao economista (William Vickrey, 1914 - 1996) e ao matemático escocês (James Mirlees, 1936) pelo contributo fundamental para a teoria económica dos incentivos sob informação assimétrica; e, em 2005, ao matemático (Robert Aumann, 1930) e ao economista (Thomas Schelling, 1921) por terem melhorado o nosso entendimento do conflito e cooperação através da análise da Teoria dos Jogos.

Quanto à natureza da sua informação, os jogos podem ser de informação completa, isto é, cada jogador conhece previamente o pagamento resultante da escolha de cada uma das estratégias; ou de informação incompleta, nos quais pelo menos um jogador não tem conhecimento do pagamento relativo a pelo menos uma das estratégias de outro jogador. Os modelos que vamos analisar neste trabalho inserem-se na classe de jogos de informação completa.

Contextualização Histórica

Os jogos acompanham a humanidade desde a sua pré-história. Por colocar as pessoas em situações nas quais vencer ou perder depende das escolhas feitas adequadamente logo no início das partidas, os jogos revelaram-se uma excelente ferramenta para o desenvolvimento da personalidade e da inteligência das crianças. Entretanto, apesar desse aspecto pedagógico, os jogos raramente eram considerados objectos de estudo sério.

Em 1730, com o sucesso dos trabalhos de (Isaac Newton, 1642-1727), a matemática havia já alcançado um respeito considerável. Nesta época, o matemático suíço (Daniel

Bernoulli, 1700-1782) concebeu a noção de utilidade como um valor de incremento inversamente proporcional à quantidade inicial, isto é, tendo em vista o comportamento dos jogadores, haveria uma medida subjectiva de satisfação que explicaria a reacção das pessoas em situações de risco, nos termos de maximização da sua utilidade. Esta circunstância só dois séculos depois receberia uma formulação moderna pela mão do matemático francês (Émile Borel, 1871-1956), na forma do Teorema Minimax. Usando a noção de estratégias mistas, (Borel, 1927), conseguiu resolver jogos com duas pessoas que tivessem até cinco opções de estratégias à sua escolha. Uma solução geral, entretanto, só viria a ser alcançada pelo matemático húngaro (John Von Neumann, 1903-1957), em 1928, consolidando as bases da moderna Teoria dos Jogos, em que o conceito de utilidade é fundamental. Outro conceito chave dessa teoria começou a ser trabalhado pelo filósofo e economista francês (Antoine Augustin Cournot, 1801-1877). Nas suas análises sobre os casos de duopólio¹, Cournot formalizou uma versão restrita do conceito de equilíbrio que iria ser generalizada, no século seguinte, por John Nash em trabalhos que tornaram a Teoria dos Jogos pertinente a situações em que um lado pode vencer sem precisar, necessariamente, derrotar o adversário. Cournot apresentou uma definição de mercado que é uma das bases ainda usadas em economia. Este trabalho fez dele um pioneiro da economia matemática. O modelo de Cournot foi reformulado pelo matemático francês (Joseph Louis François Bertrand, 1822 - 1900), usando preços em vez de quantidades como variáveis estratégicas, o que permitiu mostrar que o preço de equilíbrio era apenas o preço competitivo, uma surpreendente conclusão ignorada então.

No século XX, os matemáticos (John von Neumann², 1903-1957) e (Oskar Morgenstern, 1902-1976) lançaram as bases de uma Teoria de Jogos, propriamente dita, no livro "Theory of Games and Economic Behaviour" (Teoria de Jogos e Comportamento Económico, 1944) que interpretava as escolhas racionais e os acontecimentos sociais por meio dos modelos de jogos de estratégia, ou seja, diante de uma certa gama de opções, os agentes escolheriam as estratégias de acção que lhes fossem mais vantajosas de acordo com um cálculo acerca da sua probabilidade e satisfação máxima da sua utilidade. Nesta obra, Neumann e Morgenstern estabeleceram, como parâmetros da sua teoria, os jogos de duas pessoas com soma zero. Assim, produziram uma consistente axiomatização da teoria da utilidade que foi amplamente aplicada nos diversos domínios económicos e fora destes.

¹ Duopólio - mercado onde existem apenas duas empresas concorrentes.

² John von Neumann - natural de Budapeste, recebeu em 1926 o diploma de Engenheiro Químico e o doutoramento em Matemática pela Universidade de Budapeste. Foi o 1º matemático a estar envolvido no projecto ENIAC e mais tarde no EDVAC. Neste, foi aplicada a ideia de programação interna proposta por von Neumann.

No entanto, por mais inspirada e detalhada que fossem a prova do Teorema Minimax e a formalização dos jogos de soma zero, a Teoria dos Jogos surgiu incompleta, ao deixar em segundo plano os jogos de soma variável e os não-cooperativos. Cedo, matemáticos brilhantes trabalharam para preencher as lacunas deixadas. John Nash³ procurou generalizar o teorema minimax de von Neumann para todo o tipo de jogos. A solução encontrada foi baptizada de ponto de equilíbrio, como se fosse um repouso natural nas ocasiões em que nenhum jogador poderia melhorar a sua posição, mudando de estratégia, sem que piorasse os resultados dos demais envolvidos. Nash conseguiu provar que, para qualquer tipo de jogo, existe pelo menos um ponto de equilíbrio que pode ser encontrado usando estratégias mistas, como uma variação na proporção em que são aplicadas as estratégias originais, ditas puras. Com isso, ao lado do Teorema Minimax, o equilíbrio de Nash tornou-se um dos alicerces fundamentais da Teoria dos Jogos, pois permitiu que os jogos não-cooperativos pudessem ser tratados.

A elegância e precisão das provas matemáticas de Neumann e Nash, apesar de formarem uma base teórica sólida, levaram os investigadores interessados a obter contra-exemplos e prepararem estudos laboratoriais que consolidassem a Teoria dos Jogos. Em Janeiro de 1950, os laboratórios da RAND Corporation, instituição que canalizava fundos do governo dos EUA para estudos científicos relacionados com a guerra-fria, tinham, nos seus quadros, matemáticos astutos que prepararam uma experiência que se tornou histórica e tinha como finalidade verificar se indivíduos de “carne e osso” seriam capazes de encontrar estratégias em equilíbrio previstas pela teoria. Por cem vezes realizaram os testes com a participação do matemático John Williams e do economista Armen Alchian que interagiam entre si. Entretanto, em vez de procurarem as suas estratégias dominantes e pararem num ponto de equilíbrio, eles optaram por cooperar mais vezes do que trair o outro. Esta famosa experiência ficou conhecida, depois, como Dilema dos Prisioneiros graças à história contada pelo canadense (Albert William Tucker, 1905-1995) num seminário para psicólogos na Universidade de Stanford. Assim, facilmente puderam constatar que factores psicológicos que influenciavam decisivamente os processos deliberativos impediam qualquer tentativa de formalização. Nesse contexto, os ataques directos que a Teoria dos Jogos começava a receber, em parte, arrefecera o entusiasmo inicial da primeira metade do século XX. Diversos novos conceitos foram criados no

³ John Nash - natural de Bluefield - E.U.A., escreveu, aos 21 anos, uma tese de doutoramento composta por 27 páginas de ideias originais que, 45 anos mais tarde, lhe daria o Prémio Nobel da Economia.

sentido de aproximar a teoria da realidade vivida pelas pessoas nos seus conflitos quotidianos. Estudos de jogos repetidos; estocásticos⁴, cujos pagamentos sofrem variação numa percentagem fixa; novos modelos de jogos como a Batalha dos Sexos; e as representações de jogos na forma extensiva, de árvores connosco e ramos que esquematizam os movimentos tomados, e estratégica, com matrizes onde figuram a lista de estratégias de cada jogador e seus resultados cruzados em células individuais, são alguns exemplos dos muitos aspectos desenvolvidos após 1950.

Nos anos setenta, investigadores como Reinhard Selten (em jogos dinâmicos) e John Harsanyi (em jogos de informação incompleta) desenvolveram os conceitos que permitiram a aplicação frutífera da Teoria dos Jogos à economia e a outras disciplinas. Robert Aumann foi pioneiro na prossecução de uma análise formal dos jogos repetidos infinitamente, uma vez que, segundo este matemático israelita, em situações reais, a cooperação pode ser mais facilmente sustentada em relações de longo prazo do que num só encontro. Assim, a Teoria dos Jogos Repetidos consegue melhorar a nossa compreensão dos pré-requisitos para a cooperação.

Os problemas que Nash havia percebido nos jogos repetidos foram aprofundados na teoria de Maynard Smith, cujo principal livro é "Evolution and the Theory of Games" - 1982, e na teoria da cooperação de Robert Axelrod, iniciada em 1984 em "The Evolution of Cooperation". Daí em diante, a Teoria dos Jogos deixa de ser assunto exclusivo de economistas e matemáticos, passando a ser discutida abertamente por cientistas das mais diversas áreas do conhecimento.

Modelos Económicos

As teorias económicas são elaboradas com recurso a modelos económicos. Um modelo é uma representação simplificada da realidade que se pretende analisar, que se concentra no que nela é essencial e ignora o que é acessório. A nova economia industrial preocupa-se cada vez mais com a interacção estratégica: de que forma os resultados de uma empresa influenciam os resultados das outras?

A resposta a esta pergunta é dada através da Teoria dos Jogos. Neste contexto, o mercado é visto como um campo de jogo com três elementos essenciais: os jogadores -

⁴ **Estocásticos** são aqueles que têm origem em processos não determinísticos, com origem em eventos aleatórios.

podem ser empresas, países, indivíduos, etc. - que tomam decisões racionais sobre as acções a desenvolver; as estratégias, isto é, as diferentes acções possíveis a desenvolver pelos jogadores; e os resultados, que derivam das acções estratégicas dos jogadores.

Assim, a Teoria dos Jogos pode ser entendida como uma série de ensaios dentro da Economia, mais precisamente na Microeconomia, que actua sobre expectativas e comportamentos. Trata-se de uma análise matemática de situações que envolve interesses em conflito a fim de indicar as melhores opções de acção para que seja atingido o objectivo desejado. Ao nível da economia do trabalho e financeira, a Teoria dos Jogos é usada em modelos para analisar o comportamento das empresas no mercado. Três dos modelos de duopólio mais célebres são o (à la Cournot, 1838), o de (Bertrand, 1883) e o de (Stackelberg, 1934). Os modelos originais são baseados na existência de um duopólio homogéneo em que os custos marginais das duas empresas são constantes e iguais. (Augustin Cournot, 1801-1877) é considerado um dos "pais" da microeconomia moderna, especialmente pela forma como introduz a matemática nas suas análises, entre as quais o modelo de duopólio ocupa um lugar privilegiado e consiste no seguinte: dadas duas empresas, únicas produtoras de um determinado produto homogéneo, cada uma deverá escolher uma quantidade a produzir, de forma a maximizar o seu lucro. A debilidade deste modelo reside, provavelmente, no carácter "ingénuo" das conjecturas das empresas que se contentam em adaptar-se às ofertas das outras. O primeiro modelo em que as empresas são assimétricas é da autoria do economista alemão (Heinri von Stackelberg, 1905-1946). O modelo de Stackelberg é do tipo do à la Cournot, em que as empresas decidem sobre as quantidades a produzir, com a diferença de que, ao invés de decidirem simultaneamente, as empresas decidem uma após a outra. Existe uma empresa líder, que decide em primeiro lugar, e uma empresa seguidora que toma a sua decisão tendo como dado a decisão da primeira.

Preliminares

Um jogo é um modelo teórico de conflitos de interesse entre duas ou mais partes (jogadores), com o objectivo de maximizarem os seus "ganhos" e a sua solução é a melhor forma de cada jogador jogar.

Podem distinguir-se dois tipos de jogos: cooperativos e não-cooperativos.

Entende-se por jogos cooperativos aqueles em que os jogadores podem estabelecer coligações entre si, em que fazem acordos sobre a definição de estratégias e divisão do

pagamento total pela coligação; por outro lado, os jogos não-cooperativos são aqueles em que o pré-acordo na escolha de estratégias entre dois ou mais jogadores e qualquer redistribuição dos pagamentos entre qualquer grupo de jogadores é proibido.

Relativamente aos jogos não-cooperativos, podem fazer-se duas distinções: jogos estáticos ou dinâmicos e jogos com ou sem informação completa. Nos jogos estáticos, os jogadores tomam as suas decisões simultaneamente, isto é, cada jogador decide sem saber o que decidiram os outros, por exemplo: Dilema dos Prisioneiros, tesoura-papel-pedra, enquanto que nos dinâmicos acontece que um jogador, antes de tomar as suas decisões, conhece as de outros, por exemplo: duopólio de Stackelberg, damas. No que respeita aos jogos com informação completa, cada jogador conhece previamente o pagamento resultante da escolha de cada uma das estratégias, enquanto que nos jogos de informação incompleta pelo menos um jogador não tem conhecimento do pagamento relativo a pelo menos uma das estratégias de outro jogador.

Vamos agora apresentar algumas noções básicas relativas a jogos de informação completa e que serão usadas neste trabalho (cf. Sartini, Brígida A. et al., 2004).

Na representação de um jogo em forma normal, cada jogador elege simultaneamente uma estratégia, e a combinação das estratégias eleitas pelos jogadores determina o pagamento de cada um. Em geral, essa representação específica:

- O conjunto de jogadores, $J = \{1, \dots, n\}$;
- O conjunto das estratégias de que dispõe cada jogador: S_i para cada $i \in J$. Sendo s_i um elemento deste conjunto, (s_1, \dots, s_n) é uma combinação de estratégias dos n jogadores;
- A função de pagamento ou utilidade de cada jogador. Para cada $i \in J$.

$U_i(s_1, \dots, s_n)$ representa o pagamento do jogador i resultante da combinação de (s_1, \dots, s_n) estratégias dos n jogadores.

Definição 1: *A representação na forma normal de um jogo, com n jogadores, especifica os espaços de estratégias dos jogadores, S_1, \dots, S_n e as suas funções utilidade, U_1, \dots, U_n . A representação na forma normal de um jogo é a seguinte:*

$$G = \{S_1, \dots, S_n; U_1, \dots, U_n\}.$$

Vejamos agora a definição de Equilíbrio de Nash, um conceito de solução que dá lugar a previsões muito precisas numa classe de jogos muito ampla. A noção de ponto de equilíbrio, em termos de Teoria dos Jogos, foi formalizada por John Nash como uma generalização da solução minimax para jogos não-cooperativos. O ponto de equilíbrio, nas palavras de Nash, é o conjunto de resultados opostos que maximiza os ganhos de cada jogador em face da melhor estratégia do outro.

Definição 2: *Seja $G = \{S_1, \dots, S_n; U_1, \dots, U_n\}$ um jogo na forma normal. As estratégias $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n$ formam um equilíbrio de Nash se, para todo o jogador i , \hat{s}_i é a melhor resposta (ou pelo menos uma delas) do jogador i às estratégias $(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{i-1}, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_n)$ dos restantes $n-1$ jogadores:*

$$U_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{i-1}, \hat{s}_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_n) \geq U_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{i-1}, s_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_n)$$

para cada estratégia possível $s_i \in S_i$.

Ou seja, \hat{s}_i é o valor onde $\max U_i(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{i-1}, s_i, \hat{s}_{i+1}, \dots, \hat{s}_n)$ é atingido.

Vamos ilustrar estas noções com um exemplo clássico formulado por Albert W. Tucker, "O Dilema do Prisioneiro", apresentado pela primeira vez na universidade de Princeton em 1950, e consiste no seguinte:

Exemplo 3: *Dois indivíduos, suspeitos de cometerem um crime grave, são detidos e colocados em celas separadas, sem possibilidade de comunicação entre eles. A polícia não tem evidências suficientes para condenar os dois suspeitos, a menos que um deles confesse. Foram-lhes explicadas quais as consequências derivadas das decisões que tomarem, isto é, se nenhum confessar, ambos serão condenados por um delito menor e sentenciados a um mês de prisão; se ambos confessarem, serão punidos com seis meses de cadeia; finalmente, se um confessar e o outro não, o que confessar será posto em liberdade imediatamente, enquanto o outro será condenado a nove meses de prisão, seis pelo delito e três meses por obstrução à justiça. Estamos, então, perante um jogo com dois jogadores em que o espaço de estratégias é dado por:*

$S_1 = \{Coopera, Trai\}$ espaço de estratégias do jogador 1

$S_2 = \{Coopera, Trai\}$ espaço de estratégias do jogador 2

e a função utilidade é $U_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \{0, -1, -6, -9\}$. A representação na forma normal do jogo será, então, a seguinte: $G = \{S_1, S_2, U_1, U_2\}$. Vamos agora encontrar o Equilíbrio de Nash para este jogo. Se o preso 2 jogar "Cooperar", a melhor resposta do preso 1 será "Trair", uma vez que $\max\{-1, 0\} = 0$. Se, por outro lado, o jogador 2 jogar "Trair", a melhor resposta do preso 1 será "Trair", uma vez que $\max\{-9, -6\} = -6$. Procedendo de modo análogo relativamente às melhores respostas do preso 2, chegamos à conclusão que "Trair" é a melhor resposta do preso 2 às estratégias possíveis do preso 1. Assim, o único equilíbrio de Nash para este jogo é (Trai; Trai).

Tabela 1: Tabela exemplificativa do Dilema do Prisioneiro

		Preso 2	
		Coopera	Trai
Preso 1	Coopera	(-1, -1)	(-9, 0)
	Trai	(0, -9)	(-6, -6)

O modelo de duopólio de Stackelberg é um exemplo de um jogo dinâmico de informação completa e perfeita, isto é, um jogo no qual, em cada jogada, joga um só jogador que é conhecedor de todas as jogadas anteriores. Este tipo de jogos desenvolve-se da seguinte forma: 1) o jogador 1 joga; 2) o jogador 2 observa a jogada do jogador 1 e finalmente toma a sua decisão, com a qual concluiu o jogo; e tem as seguintes características:

- as decisões são tomadas de forma sucessiva;
- todas as decisões anteriores são conhecidas antes de ser tomada a decisão seguinte;
- o pagamento de cada jogador, para cada combinação possível de jogadas, é uma informação de domínio público.

Resolvemos um jogo deste tipo por indução recíproca, da seguinte forma: quando corresponder ao jogador 2 decidir na segunda etapa do jogo, ele depara-se com o problema de $\max_{a_2 \in A_2} U_2(a_1, a_2)$, dada a acção a_1 adoptada na etapa anterior pelo jogador 1.

Suponhamos que, para cada $a_1 \in A_1$, o problema de optimização do jogador 2 tem uma

única solução, que podemos denotar por $R_2(a_1)$ e representa a melhor resposta do jogador 2 à acção a_1 do jogador 1. No entanto, como o jogador 1 também pode resolver o problema de optimização do jogador 2, o jogador 1 deveria prever a reacção do jogador 2 a cada possível acção sua, de modo que o problema do jogador 1 na primeira etapa se concretizaria por $\max_{a_1 \in A_1} U_1(a_1, R_2(a_1))$. Supondo também que este tem uma única solução, a qual pode denominar-se por \hat{a}_1 , chama-se a $(\hat{a}_1, R_2(\hat{a}_1))$ o resultado do jogo por indução recíproca:

Vamos apresentar um jogo dinâmico de informação completa mas imperfeito, isto é, em algum momento do jogo o jogador que decide não conhece toda a história do jogo até esse momento. Trata-se de um jogo em duas etapas e caracteriza-se pelo seguinte:

1. Os jogadores 1 e 2 escolhem simultaneamente as acções a_1 e a_2 dos conjuntos de estratégias A_1 e A_2 , respectivamente;
2. Os jogadores 3 e 4 observam o resultado da 1ª etapa, (a_1, a_2) ; e escolhem simultaneamente as acções a_3 e a_4 dos conjuntos de estratégias A_3 e A_4 ; respectivamente.
3. As funções utilidade são: $U_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Resolvemos este jogo usando indução recíproca da seguinte forma: suponha-se que, para cada resultado da primeira etapa, (a_1, a_2) , o jogo que fica pendente para a segunda etapa entre os jogadores 3 e 4 tem um único equilíbrio de Nash dado por $(\hat{a}_3(a_1, a_2), \hat{a}_4(a_1, a_2))$. Se os jogadores 1 e 2 prevêm que o comportamento dos jogadores 3 e 4, na segunda etapa, será dado por $(\hat{a}_3(a_1, a_2), \hat{a}_4(a_1, a_2))$, a interacção entre os jogadores 1 e 2 na primeira etapa deve concretizar-se assim: os jogadores 1 e 2 jogam simultaneamente e $U_i(a_1, a_2, \hat{a}_3(a_1, a_2), \hat{a}_4(a_1, a_2))$, para $i = 1, 2$ são as suas funções utilidade. Suponhamos que existe um único equilíbrio de Nash (\hat{a}_1, \hat{a}_2) do jogo na primeira etapa. Neste caso, $(a_1, a_2, \hat{a}_3(a_1, a_2), \hat{a}_4(a_1, a_2))$ é o resultado do jogo.

Estrutura da dissertação

A seguir vamos apresentar a forma como a dissertação está estruturada.

O capítulo 2 tem como objectivo apresentar dois modelos matemáticos conhecidos da teoria da organização industrial, o modelo de duopólio de Cournot, que analisa o comportamento de duas empresas que decidiam simultaneamente as quantidades a produzir um mesmo produto homogéneo, e o modelo de duopólio de Stackelberg, jogo com duas etapas onde duas empresas, competindo em quantidades, produzem um produto homogéneo.

No capítulo 3 estudamos um modelo matemático de duopólio internacional onde duas empresas localizadas em países diferentes competem nos mercados de ambos os países. Os governos respectivos impõem taxas de importação. Assim, o jogo decorre em duas etapas: primeiro, os governos decidem as taxas de importação, depois, as empresas decidem as quantidades a produzir.

No capítulo 4, apresentamos um modelo análogo ao anterior, mas considerando que uma empresa é líder. Deste modo, após fixação, em simultâneo, das taxas de importação, a empresa líder anuncia a quantidade que vai produzir, e só depois a empresa seguidora toma a sua decisão.

No capítulo 5, analisamos o efeito que um aumento da procura pode provocar no comportamento das empresas e, conseqüentemente, no mercado

No capítulo 6, analisamos os efeitos de impostos ambientais e de políticas comerciais numa competição internacional entre uma empresa pública e uma empresa privada. Verificamos que, em equilíbrio, os níveis dos danos ambientais e do bem-estar social são mais elevados no país onde se localiza a empresa pública do que no país onde se localiza a empresa privada.

No capítulo 7, estudamos um modelo matemático que descreve um mercado no qual uma empresa sem fins lucrativos compete com uma empresa privada, ou com uma empresa pública, ou com ambas.

Finalmente, o capítulo 8 apresenta as conclusões desta dissertação.

2. Aplicação da teoria de jogos num mercado de duopólio

2.1.Introdução

Como aplicação da teoria de jogos no estudo do comportamento das empresas em mercados oligopolistas, mercados com poucas empresas, apresentamos, seguindo o livro (Gibbons, R., 1992) e (cf. Ferreira Fernanda A., 2007), dois modelos clássicos: o modelo de Cournot e o modelo de Stackelberg.

2.2.Modelo de Cournot

Antoine Augusti Cournot, matemático, filósofo e economista (1838), na sua obra intitulada “Pesquisa sobre os princípios matemáticos da teoria das riquezas”, formulou um modelo em que, duas empresas decidem simultaneamente quais as quantidades a produzir de um mesmo produto homogéneo, num jogo de informação completa.

Cada empresa conhece o custo da sua concorrente e o preço de mercado e a partir dessa informação decide a quantidade a produzir.

Trata-se de um jogo de um período, no qual duas empresas produzem um bem homogéneo, sendo conhecida a curva de procura do mercado, ou seja, o preço do mercado é função da quantidade total produzida por ambas as empresas.

No modelo de Cournot, o essencial é que “cada empresa considera fixa a quantidade de produção da sua concorrente e toma a sua própria decisão no que respeita à quantidade que produzirá”. Cournot adoptou como conceito de equilíbrio de mercado a situação em que ambas as empresas reagem optimamente à decisão da empresa concorrente.

A função de procura inversa é dada por:

$$P(Q) = a - bQ$$

onde $P(Q)$ é o preço de mercado em função da quantidade total produzida, Q (quantidade agregada), q_1 é a quantidade produzida pela empresa E_1 , q_2 é a quantidade produzida pela empresa E_2 , $a > 0$ representa a quantidade de saturação de mercado e $b > 0$ é o declive da função de procura, decrescente em $\left[0, \frac{a}{b}\right]$.

Suponhamos que os custos marginais de cada empresa são constantes, menores que a e iguais a c para as duas empresas. Suponhamos ainda que não há custos fixos e que no mercado vende-se toda a quantidade produzida. Assim o custo total da empresa E_i para produzir a quantidade q_i é dado por, $C_i = cq_i$.

O lucro π_i da empresa E_i é dado por,

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(P(Q) - c), \text{ com } i, j \in \{1, 2\} \text{ e } i \neq j$$

Cada empresa deseja maximizar o seu lucro. Começemos por determinar a função melhor resposta $\hat{q}_i(q_j)$, ou seja a melhor resposta \hat{q}_i a q_j . Para tal vamos resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max \pi_i(q_i, q_j) = \max(a - b(q_i + q_j) - c)q_i$$

As condições de 1º ordem são

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{q}_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

e

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow \hat{q}_2 = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

As condições de 2ª ordem para este problema de maximização são satisfeitas pois,

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -2b < 0 \text{ pois } b > 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2b < 0 \text{ pois } b > 0$$

Assim, o equilíbrio de Nash obtêm-se resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b} \\ q_2 = \frac{a - bq_1 - c}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{q}_1 = \frac{a - c}{3b} \\ \hat{q}_2 = \frac{a - c}{3b} \end{cases}$$

O equilíbrio de Cournot-Nash é

$$\left(\frac{a - c}{3b}, \frac{a - c}{3b} \right).$$

Para estas quantidades, nenhuma das empresas tem qualquer incentivo para alterar as suas estratégias, porque uma é a melhor resposta à outra e vice-versa.

A Figura 1 apresenta os gráficos das funções melhor resposta da empresa E_i . Da intersecção dos gráficos das duas funções obtemos o equilíbrio de Cournot.

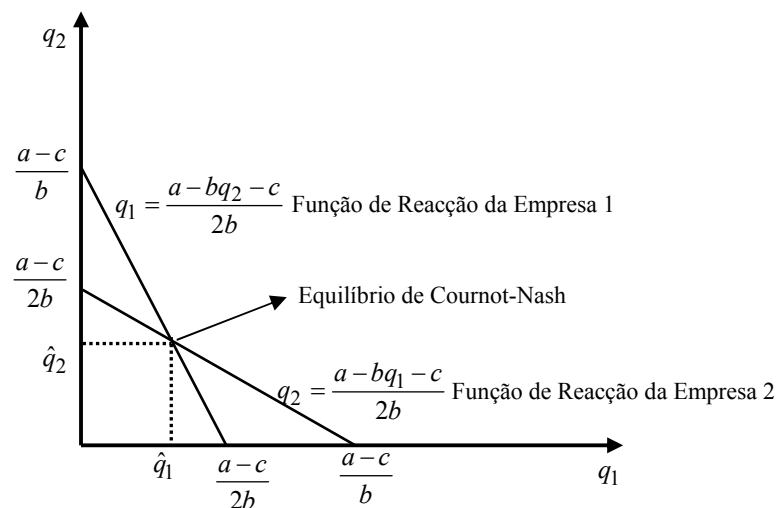


Figura 1: Representação geométrica do equilíbrio de Cournot-Nash

A quantidade agregada no mercado é

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{2(a-c)}{3b}.$$

O preço praticado é

$$P = a - b(q_1 + q_2) = a - b \frac{2(a-c)}{3b} = \frac{a+2c}{3}.$$

Os lucros de cada empresa são dados por

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

2.3. Modelo de Stackelberg

Heinrich Von Stackelberg (1905-1946) foi um economista alemão que contribuiu para a teoria dos jogos e a teoria dos oligopólios. O seu principal trabalho foi, *Marktform und Gleichgewicht* (publicado em 1934) que descreve o comportamento dos modelos de duopólio.

O modelo de Stackelberg proposto em 1934 por Heinrich Von Stackelberg é um exemplo de jogo com duas etapas. Duas empresas E_1 (líder) e E_2 (seguidora), produzem um determinado produto homogêneo, competindo as quantidades mas as decisões não são tomadas simultaneamente. A empresa líder decide primeiro e a empresa seguidora em segundo lugar, esta última decide a quantidade a produzir após ter observado as decisões da empresa líder.

Suponhamos que a função de procura inversa é decrescente e linear num intervalo $\left[0, \frac{a}{b}\right]$, e que os custos marginais de cada empresa são constantes, menores que a e iguais a c para as duas empresas, não há custos fixos e é dito no mercado que se vende toda a quantidade produzida.

A função de procura inversa é dada por:

$$P(Q) = a - bQ$$

onde $P(Q)$ é o preço de mercado em função da quantidade total produzida, Q (quantidade agregada), q_1 é a quantidade produzida pela empresa E_1 , q_2 é a quantidade produzida pela empresa E_2 , $a > 0$ representa a quantidade de saturação de mercado e $b > 0$ é o declive da função de procura.

O custo total da empresa E_i para produzir a quantidade q_i é dado por, $C_i = cq_i$.

O lucro π_i da empresa E_i é dado por,

$$\pi_i(q_i, q_j) = (P(Q) - c)q_i, \text{ com } i, j \in \{1, 2\} \text{ e } i \neq j$$

O modelo de duopólio de Stackelberg coloca-nos um problema dinâmico. Equilíbrios neste tipo de mercados são determinados partindo da última decisão para a primeira (do fim para o princípio) – indução retroactiva. Assim, no caso de um duopólio de Stackelberg, indicamos primeiro a decisão de equilíbrio do seguidor e só depois a do líder.

O jogo desenvolve-se então em duas etapas:

1. A empresa E_1 escolhe a quantidade a produzir.
2. A empresa E_2 observa a empresa líder e escolhe a quantidade a produzir.

Por indução retroactiva, analisemos as decisões da empresa E_2 . Começamos por determinar a quantidade a ser produzida pela empresa E_2 , conhecida a quantidade q_1 da empresa E_1 . A empresa E_2 escolhe a quantidade q_2 de forma óptima.

A função melhor resposta da empresa E_2 $\hat{q}_2(q_1)$, ou seja, a quantidade óptima a ser escolhida pela empresa seguidora dado a decisão da empresa líder. pode ser obtida resolvendo o seguinte problema de maximização:

$$\max_{q_2} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2} (a - bq_1 - bq_2 - c)q_2.$$

A condição de primeira ordem deste problema é:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{q}_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}.$$

Como $\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2b < 0$, a condição suficiente de máximo é satisfeita. Obtemos,

assim, a estratégia óptima da empresa E_2 , isto é, o valor óptimo de q_2 para cada valor de q_1 que possa ocorrer.

Analisemos agora as decisões da empresa E_1 , empresa líder, na primeira etapa, tendo em conta que a empresa E_2 , empresa seguidora, vai produzir, $q_2 \geq 0$, anteriormente calculado. Assim a função lucro da empresa líder é

$$\pi_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1.$$

Substituindo q_2 pela função melhor resposta da empresa seguidora, obtemos

$$\pi_1 = aq_1 - bq_1^2 - bq_1 \left(\frac{a - bq_1 - c}{2b} \right) - cq_1.$$

Calculando a condição de primeira ordem

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{q}_1 = \frac{a - c}{2b}.$$

Consequentemente,

$$\hat{q}_2 = \frac{a - c}{4b}.$$

A Figura 2 apresenta os gráficos das funções melhor resposta da empresa E_i . Da intersecção dos gráficos das duas funções obtemos o equilíbrio de Stackelberg

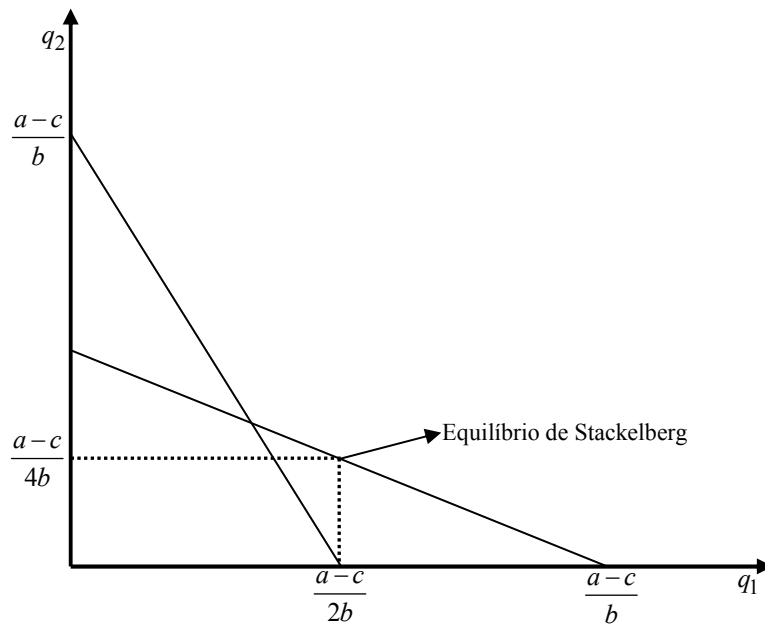


Figura 2: Representação geométrica do equilíbrio de Stackelberg

A quantidade agregada no mercado é

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{3(a-c)}{4}.$$

O preço praticado é

$$P = a - b(q_1 + q_2) = \frac{a+3c}{4}.$$

Os lucros de cada empresa são dados por

$$\pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b},$$

e

$$\pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16b}.$$

2.4. Conclusão

Os modelos de duopólio de Stackelberg e de Cournot ambos competem em quantidades.

O modelo de Cournot é um ponto de referência natural para a análise do modelo de Stackelberg, podendo o equilíbrio de Stackelberg ser visto como o resultado de uma estratégia de antecipação da empresa líder. Entretanto, o primeiro “movimento” de decisão dá ao líder em Stackelberg uma vantagem em relação ao modelo de Cournot.

Existe também um importante conceito no jogo de Stackelberg, o da informação perfeita: o seguidor deve observar a quantidade escolhida pelo líder caso contrário o jogo reduz-se a Cournot.

Na competição de Cournot, a simultaneidade do jogo, ou seja a imperfeição do conhecimento, pode trazer desvantagens para os competidores.

3. Modelo de duopólio de Cournot em Competição Internacional

3.1. Introdução

Neste capítulo consideramos um modelo de duopólio internacional, ou seja, consideremos dois países idênticos e sejam E_1 e E_2 duas empresas, uma em cada país, únicas produtoras de um determinado artigo homogêneo destinado quer para o comércio interno quer para o comércio externo.

Os governos de cada país fixam, simultaneamente, as taxas sobre as exportações. As empresas, depois de saberem as taxas escolhem, simultaneamente, as quantidades a produzir quer para consumo interno quer para exportação.

Por simetria do modelo fixemo-nos num país, com uma empresa nacional. As empresas concorrem de acordo com o modelo de Cournot (cf. Gibbons, R., 1992).

3.2. O modelo e os resultados

Cada país tem um governo que estabelece uma taxa t_i sobre os produtos importados. Cada empresa deverá escolher uma quantidade a produzir, de forma a maximizar o seu lucro.

Sejam h_i e e_i as quantidades a produzir pela empresa E_i , respectivamente, para o comércio interno e para exportar para o país j . A quantidade agregada no mercado do país i vem dada por $Q_i = h_i + e_j$, com $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$.

O preço de mercado do país i depende da quantidade agregada, de acordo com a função de procura inversa

$$P_i(Q_i) = a - bQ_i$$

onde a é uma constante que representa a quantidade de saturação do mercado e b é o declive da recta da procura.

As empresas E_1 e E_2 têm custos marginais, c_1 e c_2 , respectivamente, constante e não têm custos fixos. Assim, o custo total de produção para a empresa E_i é dado por $C_i(h_i, e_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Por outro lado, as empresas envolvem-se em custos sobre exportações, isto é, se a empresa i exporta e_i para o país j , e uma vez que o governo j estabeleceu uma taxa t_j , a empresa i deverá pagar $t_j e_i$ ao governo j .

O jogo segue as seguintes etapas:

1. Os governos escolhem simultaneamente as taxas t_1 e t_2 ;
2. As empresas observam as taxas, e escolhem simultaneamente as quantidades a produzir para o mercado interno e para exportação, (h_1, e_1) e (h_2, e_2) .

Os lucros das empresas E_1 e E_2 são dados por

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) \\ &= (a - b(h_1 + e_2) - c_1)h_1 + (a - b(h_2 + e_1) - c_1)e_1 - t_2 e_1 \\ \pi_2 &= \pi_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) \\ &= (a - b(h_2 + e_1) - c_2)h_2 + (a - b(h_1 + e_2) - c_2)e_2 - t_1 e_2\end{aligned}$$

onde a 1ª parcela o lucro obtido pela quantidade vendida no próprio país, a 2ª parcela corresponde ao lucro obtido pela quantidade vendida no outro país e a 3ª parcela é o valor obtido pela aplicação da taxa à quantidade exportada pela empresa E_2 .

As funções de bem-estar dos governos são dadas por

$$\begin{aligned}W_1(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) &= \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2 + (a - b(h_1 + e_2) - c_1)h_1 + \\ &\quad + (a - b(e_1 + h_2) - c_1 - t_2)e_1 + t_1 e_2 \\ W_2(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2) &= \frac{b}{2}(h_2 + e_1)^2 + (a - b(h_2 + e_1) - c_2)h_2 + \\ &\quad + (a - b(e_2 + h_1) - c_2 - t_1)e_2 + t_2 e_1\end{aligned}$$

onde a 1ª parcela representa o excedente do consumidor, que corresponde à diferença entre o montante que o consumidor estaria disposto a pagar por determinada quantidade de um bem e o montante que efectivamente paga, a 2ª parcela o lucro obtido pela quantidade vendida no próprio país, a 3ª parcela corresponde ao lucro obtido pela quantidade vendida

no outro país e a 4ª parcela é o valor obtido pela aplicação da taxa à quantidade exportada pela empresa E_2 .

Resolvendo o jogo por indução retroactiva, que significa que o jogo é resolvido de *trás para a frente*, começamos por determinar as quantidades óptimas a serem produzidas pelas empresas.

Se $(\hat{h}_1, \hat{e}_1, \hat{h}_2, \hat{e}_2)$ é um equilíbrio de Nash, então (\hat{h}_1, \hat{e}_1) é solução de

$$\max_{h_i, e_i \geq 0} \pi_i(t_i, t_j, h_i, e_i, \hat{h}_j, \hat{e}_j).$$

Maximizando o lucro das empresas E_1 e E_2 em relação a h_1, e_1, h_2 e e_2 obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial h_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial e_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial h_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial e_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2bh_1 + a - be_2 - c_1 = 0 \\ -bh_2 - 2be_1 + a - t_2 - c_1 = 0 \\ -2bh_2 - be_1 + a - c_2 = 0 \\ -bh_1 + a - 2be_2 - t_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{a - be_2 - c_1}{2b} \\ e_1 = \frac{a - bh_2 - c_1 - t_2}{2b} \\ h_2 = \frac{a - be_1 - c_2}{2b} \\ e_2 = \frac{a - bh_1 - c_2 - t_1}{2b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{3b} \\ e_1 = \frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{3b} \\ h_2 = \frac{a + t_2 + c_1 - 2c_2}{3b} \\ e_2 = \frac{a - 2t_1 + c_1 - 2c_2}{3b} \end{cases}$$

Substituindo nas equações de bem-estar W_1 e W_2 os parâmetros h_1, e_1, h_2 e e_2 obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{W}_1 = & \frac{b}{2} \left(\frac{a+t_1-2c_1+c_2}{3b} + \frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} \right)^2 + \\ & + \left(a - b \left(\frac{a+t_1-2c_1+c_2}{3b} + \frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} \right) - c_1 \right) \left(\frac{a+t_1-2c_1+c_2}{3b} \right) + \\ & + \left(a - b \left(\frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} + \frac{a+t_2+c_1-2c_2}{3b} \right) - c_1 \right) \left(\frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} \right) - \\ & - t_2 \left(\frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} \right) + t_1 \left(\frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{W}_2 = & \frac{b}{2} \left(\frac{a+t_2+c_1-2c_2}{3b} + \frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} \right)^2 + \\ & + \left(a - b \left(\frac{a+t_2+c_1-2c_2}{3b} + \frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} \right) - c_2 \right) \left(\frac{a+t_2+c_1-2c_2}{3b} \right) + \\ & + \left(a - b \left(\frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} + \frac{a+t_1-2c_1+c_2}{3b} \right) - c_2 \right) \left(\frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} \right) - \\ & - t_1 \left(\frac{a-2t_1+c_1-2c_2}{3b} \right) + t_2 \left(\frac{a-2t_2-2c_1+c_2}{3b} \right)\end{aligned}$$

Uma vez resolvido o jogo entre as duas empresas conforme a segunda etapa, podemos agora representar a interação entre os dois governos na primeira etapa.

Calculando as condições de primeira ordem da função de bem-estar obtemos as taxas ótimas:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial \hat{W}_2}{\partial t_2} = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-3t_1-c_2}{3b} = 0 \\ \frac{a-3t_2-c_1}{3b} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{t}_1 = \frac{a-c_2}{3} \\ \hat{t}_2 = \frac{a-c_1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados de \hat{t}_1 e \hat{t}_2 em h_1, e_1, h_2 e e_2 , obtemos as quantidades ótimas a produzir por cada empresa, quer para consumo interno quer para exportação

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_1 = \frac{a + \frac{a-c_2}{3} - 2c_1 + c_2}{3b} \\ \hat{e}_1 = \frac{a - 2\left(\frac{a-c_1}{3}\right) - 2c_1 + c_2}{3b} \\ \hat{h}_2 = \frac{a + \frac{a-c_1}{3} + c_1 - 2c_2}{3b} \\ \hat{e}_2 = \frac{a - 2\left(\frac{a-c_2}{3}\right) + c_1 - 2c_2}{3b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_1 = \frac{2(2a - 3c_1 + c_2)}{9b} \\ \hat{e}_1 = \frac{a - 4c_1 + 3c_2}{9b} \\ \hat{h}_2 = \frac{2(2a + c_1 - 3c_2)}{9b} \\ \hat{e}_2 = \frac{a + 3c_1 - 4c_2}{9b} \end{array} \right.$$

Assim, a quantidade agregada em cada mercado é

$$\hat{Q}_1 = \hat{h}_1 + \hat{e}_2 = \frac{5a - 3c_1 - 2c_2}{9b}$$

e

$$\hat{Q}_2 = \hat{h}_2 + \hat{e}_1 = \frac{5a - 2c_1 - 3c_2}{9b}$$

Notemos que, se $t_1 = t_2 = 0$ então

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &= \frac{2a - c_i - c_j}{3b}, \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad i \neq j \\ &= Q_c \end{aligned}$$

onde Q_c é a quantidade agregada no modelo de Cournot.

Assim, quando as taxas são iguais a zero, temos um resultado socialmente ótimo uma vez que se regista um aumento da quantidade produzida. Isto serve de incentivo para que os governos cheguem a um acordo de modo a eliminar as taxas, promovendo assim, o comércio livre.

3.3. Conclusão

Neste capítulo de duopólio de competição internacional, onde as empresas competem à la Cournot, calculamos as quantidades em equilíbrio a serem produzidas por cada empresa, quer para consumo interno quer para exportação, assim com as taxas ótimas impostas por cada governo.

4. Modelo de duopólio de Stackelberg em Competição Internacional

4.1. Introdução

Neste capítulo consideramos um modelo de duopólio internacional, ou seja, consideramos dois países idênticos e sejam E_1 e E_2 duas empresa que competem no mercado de um produto homogêneo, decidindo as quantidades a produzir. As empresas concorrem segundo o modelo de Stackelberg.

O que distingue este jogo do jogo à la Cournot é a maneira como cada uma das empresas toma as suas decisões. Enquanto que no modelo de Cournot as empresas decidem simultaneamente as quantidades a produzir, no modelo de Stackelberg uma das empresas (chamada empresa líder) decide em primeiro lugar, e a outra empresa (chamada empresa seguidora) decide a sua quantidade a produzir, após observar as decisões da empresa líder.

Vamos assumir que a empresa E_1 é a empresa líder e a empresa E_2 é a empresa seguidora.

Os governos de cada país fixam, simultaneamente, as taxas sobre as exportações. As empresas, depois de saberem as taxas, a empresa líder E_1 anuncia a quantidade que vai produzir, e só depois a empresa seguidora E_2 toma a sua decisão.

4.2. O modelo e os resultados

Cada país tem um governo que estabelece uma taxa t_i sobre os produtos importados. A empresa líder, E_1 , anuncia a quantidade que vai produzir, e só depois a empresa seguidora, E_2 , toma a sua decisão.

Sejam h_i e e_i as quantidades a produzir pela empresa E_i , respectivamente, para o comércio interno e para exportar para o país j . A quantidade agregada no mercado do país i vem dada por $Q_i = h_i + e_j$.

O preço de mercado do país i depende da quantidade agregada, de acordo com a função de procura inversa

$$P_i(Q_i) = a - bQ_i$$

onde a é uma constante que representa a quantidade de saturação do mercado e b é o declive da recta da procura.

As empresas E_1 e E_2 têm custos marginais constantes c_1 e c_2 , respectivamente. Assim, o custo total de produção para a empresa E_i é $C_i(h_i, e_i)$.

Por outro lado, as empresas envolvem-se em custos sobre exportações, isto é, se a empresa i exporta e_i para o país j , e uma vez que o governo j estabeleceu uma taxa t_j , a empresa i deverá pagar $t_j e_i$ ao governo j .

O jogo segue as seguintes etapas:

1. Os governos escolhem simultaneamente as taxas t_1 e t_2 ;
2. A empresa líder, E_1 , anuncia a quantidade que vai produzir, e só depois a empresa seguidora, E_2 , toma a sua decisão.

Os lucros das empresas E_1 e E_2 são dados por

$$\pi_1 = (a - b(h_1 + e_2) - c_1)h_1 + (a - b(h_2 + e_1) - c_1)e_1 - t_2 e_1$$

e

$$\pi_2 = (a - b(h_2 + e_1) - c_2)h_2 + (a - b(h_1 + e_2) - c_2)e_2 - t_1 e_2$$

respectivamente, onde a 1ª parcela representa o lucro obtido pela quantidade vendida no próprio país, a 2ª parcela corresponde ao lucro obtido pela quantidade vendida no outro país e a 3ª parcela é o valor obtido pela aplicação da taxa à quantidade exportada pela empresa E_2 .

As funções de bem-estar social dos países são dadas por:

$$W_1 = \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2 + (a - b(h_1 + e_2) - c_1)h_1 + (a - b(e_1 + h_2) - c_1 - t_2)e_1 + t_1 e_2$$

$$W_2 = \frac{b}{2}(h_2 + e_1)^2 + (a - b(h_2 + e_1) - c_2)h_2 + (a - b(e_2 + h_1) - c_2 - t_1)e_2 + t_2 e_1$$

onde a 1ª parcela representa o excedente do consumidor, que corresponde à diferença entre o montante que o consumidor estaria disposto a pagar por determinada quantidade de um bem e o montante que efectivamente paga, a 2ª parcela o lucro obtido pela quantidade vendida no próprio país, a 3ª parcela corresponde ao lucro obtido pela quantidade vendida

no outro país e a 4ª parcela é o valor obtido pela aplicação da taxa à quantidade exportada pela empresa E_2 .

Pelo método de indução retroactiva, que significa que o jogo é resolvido de *trás para a frente*, vamos maximizar a função lucro da empresa E_2 em ordem a h_2 e e_2 .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \pi_2}{\partial h_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial e_2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2bh_2 - be_1 + a - c_2 = 0 \\ -bh_1 + a - 2be_2 - t_1 - c_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = \frac{a - be_1 - c_2}{2b} \\ e_2 = \frac{a - bh_1 - c_2 - t_1}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo h_2 e e_2 na função π_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \left(a - b \left(h_1 + \frac{a - bh_1 - c_2 - t_1}{2b} \right) - c_1 \right) h_1 + \left(a - b \left(\frac{a - be_1 - c_2}{2b} + e_1 \right) - c_1 \right) e_1 - t_2 e_1 \\ &= \left(a - b \left(h_1 + \frac{a - bh_1 - c_2}{2b} \right) - c_1 \right) h_1 + \left(a - b \left(e_1 + \frac{a - be_1 - c_2}{2b} \right) - c_1 \right) e_1 - t_2 e_1 \end{aligned}$$

Maximizando o lucro π_1 da empresa E_1 em ordem a h_1 e e_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial h_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial e_1} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2bh_1 + a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2} = 0 \\ \frac{-2be_1 + a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} \\ e_1 = \frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo h_1 e e_1 em h_2 e e_2 obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_2 = \frac{a - b \left(\frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) - c_2}{2b} \\ e_2 = \frac{a - b \left(\frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) - c_2 - t_1}{2b} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_2 = \frac{a + 2t_2 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \\ e_2 = \frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \end{array} \right.$$

Assim, o bem-estar social de cada país é dado por:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2 + (a - b(h_1 + e_2) - c_1)h_1 + (a - b(e_1 + h_2) - c_1 - t_2)e_1 + t_1 e_2 \\ &= \frac{b}{2} \left(\frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} + \frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right)^2 + \\ &\quad + \left(a - b \left(\frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} + \frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right) - c_1 \right) \left(\frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) + \\ &\quad + \left(a - b \left(\frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} + \frac{a + 2t_2 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right) - c_1 - t_2 \right) \left(\frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) + \\ &\quad + t_1 \left(\frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{b}{2}(h_2 + e_1)^2 + (a - b(h_2 + e_1) - c_2)h_2 + (a - b(e_2 + h_1) - c_2 - t_1)e_2 + t_2 e_1 \\ &= \frac{b}{2} \left(\frac{a + 2t_2 + 2c_1 - 3c_2}{4b} + \frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \right)^2 + \\ &\quad + \left(a - b \left(\frac{a + 2t_2 + 2c_1 - 3c_2}{4b} + \frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) - c_2 \right) \left(\frac{a + 2t_2 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right) + \\ &\quad + \left(a - b \left(\frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} + \frac{a + t_1 - 2c_1 + c_2}{2b} \right) - c_2 - t_1 \right) \left(\frac{a - 3t_1 + 2c_1 - 3c_2}{4b} \right) + \\ &\quad + t_2 \frac{a - 2t_2 - 2c_1 + c_2}{2b} \end{aligned}$$

Maximizando as funções de bem-estar social em ordem a t_1 e t_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial t_2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5a - 19t_1 + 2c_1 - 7c_2}{16b} = 0 \\ \frac{3a - 10t_2 - 2c_1 - c_2}{8b} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5a + 2c_1 - 7c_2}{19} \\ t_2 = \frac{3a - 2c_1 - c_2}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo t_1 e t_2 em h_1, h_2, e_1 e e_2 obtendo as quantidades óptimas a serem produzidas quer para consumo interno quer para exportação

$$\begin{aligned} \begin{cases} \hat{h}_1 = \frac{a + \frac{5a + 2c_1 - 7c_2}{19} - 2c_1 + c_2}{2b} \\ \hat{h}_2 = \frac{a + 2\left(\frac{3a - 2c_1 - c_2}{10}\right) + 2c_1 - 3c_2}{4b} \\ \hat{e}_1 = \frac{a - \frac{3a - 2c_1 - c_2}{10} - 2c_1 + c_2}{2b} \\ \hat{e}_2 = \frac{a - 3\left(\frac{5a + 2c_1 - 7c_2}{19}\right) + 2c_1 - 3c_2}{4b} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{h}_1 = \frac{6(2a - 3c_1 + c_2)}{19b} \\ \hat{e}_1 = \frac{a - 4c_1 + 3c_2}{5b} \\ \hat{h}_2 = \frac{2(a + c_1 - 2c_2)}{5b} \\ \hat{e}_2 = \frac{a + 8c_1 - 9c_2}{19b} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, a quantidade agregada em cada mercado é

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= \hat{h}_1 + \hat{e}_2 \\ &= \frac{13a - 10c_1 - 3c_2}{19b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_2 &= \hat{h}_2 + \hat{e}_1 \\ &= \frac{3a - 2c_1 - c_2}{5b} \end{aligned}$$

Vamos, agora, comparar as quantidades agregadas em cada país, no modelo de Stackelberg, as quantidades agregadas no mesmo país para os dois modelos e as taxas impostas por cada país em cada um dos modelos.

$$Q_{1c} = Q_{2c} = \frac{5a - 3c_i - 2c_j}{9b} \quad t_1 = \frac{a - c_2}{3} \text{ e } t_2 = \frac{a - c_1}{3}$$

$$Q_{1s} = \frac{13a - 10c_1 - 3c_2}{19b} \quad t_1 = \frac{5a + 2c_1 - 7c_2}{19}$$

$$Q_{2s} = \frac{3a - 2c_1 - c_2}{5b} \quad t_2 = \frac{3a - 2c_1 - c_2}{10}$$

onde Q_{1c} é a quantidade agregada no modelo de Cournot no país 1, Q_{2c} é a quantidade agregada no modelo de Cournot no país 2, Q_{1s} é a quantidade agregada no modelo de Stackelberg no país 1 e Q_{2s} é a quantidade agregada no modelo de Stackelberg no país 2.

$$Q_{1s} > Q_{2s} \Leftrightarrow c_1 < \frac{2a + c_2}{3}$$

$$\text{Se } c_1 < \frac{2a + c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{1s} > Q_{2s}$$

$$\text{Se } c_1 > \frac{2a + c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{1s} < Q_{2s}$$

$$Q_{1s} > Q_{1c} \Leftrightarrow c_1 < \frac{2a + c_2}{3}$$

$$\text{Se } c_1 < \frac{2a + c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{1s} > Q_{1c}$$

$$\text{Se } c_1 > \frac{2a + c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{1s} < Q_{1c}$$

$$Q_{2s} > Q_{2c} \Leftrightarrow c_1 < \frac{2a+c_2}{3}$$

$$\text{Se } c_1 < \frac{2a+c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{2s} > Q_{2c}$$

$$\text{Se } c_1 < \frac{2a+c_2}{3} \wedge c_1 < a \wedge c_2 < a \text{ então } Q_{2s} > Q_{2c}$$

Daqui podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1:

$$\text{Se } c_1 = \frac{2a+c_2}{3} \text{ então } Q_{1s} = Q_{2s} = Q_{1c} = Q_{2c}$$

$$\text{Se } c_1 < \frac{2a+c_2}{3} \text{ então}$$

$$Q_{1s} > Q_{2s}$$

$$Q_{1s} > Q_{1c}$$

$$Q_{2s} > Q_{2c}$$

4.3. Conclusão

O modelo de Stackelberg parte do pressuposto que a empresa líder tem a vantagem de ser a primeira, logo a empresa seguidora tem de agir consoante o que a líder fixar. Assim, no primeiro momento, existe vantagem da empresa líder, tendo a seguidora que se sujeitar a essa liderança.

Se a empresa seguidora tiver a mesma capacidade produtiva que a sua concorrente, então a primeira não irá permanecer na disposição de ser sempre seguidora, uma vez que, embora a líder possa ter-se garantido com um número significativo de consumidores, a opção por uma redução do preço será uma opção estratégica por parte da empresa seguidora.

5. Modelo de Stackelberg com um acréscimo Δa na procura

5.1. Introdução

O modelo de Stackelberg é interessante para analisar certos tipos de mercado porque incorpora a utilização de promessas ou ameaças pelos jogadores. Significa que a curva de reacção da empresa *líder* é construída com base na possibilidade de resposta (contra-ataque) da empresa *seguidora*. Evidentemente, nem todas as ameaças ou promessas de que os jogadores dispõem são credíveis, uma vez que não oferecem vantagens para a sua adopção. As estratégias credíveis estão restritas ao comportamento racional de maximização dos lucros que pode ser representado por uma função de reacção. Sendo assim, existe um conjunto finito de equilíbrios de (Nash, 1951) para as diferentes combinações de estratégias possíveis de competição. Tal equilíbrio consiste num perfil de estratégias na qual a estratégia de cada jogador é uma resposta óptima para as estratégias dos outros jogadores (cf. Correia, Tiago B. et al., 2004).

5.2. Modelo de oligopólio de Stackelberg

O modelo de oligopólio de Stackelberg pode ser utilizado para analisar a competição num mercado, procurando identificar o comportamento racional dos jogadores frente a uma alteração da procura. Para a quantidade, são apresentadas duas situações:

1. Os agentes podem modular livremente a sua oferta privada;
2. A expansão da procura é condicionada à realização de investimentos produtivos.

Consideremos um mercado com estrutura de duopólio.

Existem apenas duas empresas, que dispõem basicamente das mesmas tecnologias e produzem bens homogéneos. A função da procura inversa é dada por:

$$P = a - Q$$

onde P é o preço, a é uma constante que representa a quantidade de saturação do mercado, e $Q = q_1 + q_2$ é a oferta agregada. Os custos marginais de produção c são constantes e não têm custos fixos.

Cada empresa é um jogador racional que procura maximizar o seu lucro. A competição ocorre através de uma sequência de decisões provocadas pela iniciativa da empresa líder.

Quando as empresas podem modular livremente a oferta, o lucro da empresa seguidora E_2 é dado por:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= (P-c)q_2 \\ &= (a-q_1-q_2-c)q_2\end{aligned}\quad (1)$$

Maximizando a condição de primeira ordem do lucro da empresa seguidora E_2 em ordem a q_2 obtemos:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{a-q_1-c}{2} \quad (2)$$

A expressão (2) é a função de reacção da empresa seguidora no modelo de Stackelberg. Esta revela a resposta óptima da empresa seguidora para qualquer nível de oferta escolhida pela empresa líder. Logo, as ameaças e promessas admissíveis que a empresa seguidora possui estão contidas na expressão (2).

Conhecendo a curva de reacção da empresa seguidora a empresa líder maximiza o seu lucro. Logo, a função lucro da empresa líder E_1 é dada por:

$$\pi_1 = \left(a - q_1 - \frac{a - q_1 - c}{2} - c \right) q_1 \quad (3)$$

Maximizando a função lucro da empresa E_1 em ordem a q_1 obtemos:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow q_1 = \frac{a-c}{2}$$

Substituindo q_1 na expressão (2), podemos redefinir a curva de reacção da empresa seguidora:

$$q_2 = \frac{a-c}{4} \quad (4)$$

A solução conjunta das equações (3) e (4) oferece o equilíbrio de mercado. A Figura 2 ilustra o equilíbrio de Stackelberg para o duopólio, onde R_1 é a curva de reacção da empresa líder E_1 e R_2 a curva de reacção da empresa seguidora E_2 .

Suponha agora que ocorreu um crescimento da procura tal que a função inversa começa a ser representada por:

$$\hat{P} = a x - \hat{Q}, \quad x > 1 \text{ ou, de forma equivalente,}$$

$$\hat{P} = a + \Delta a - \hat{Q}$$

Calculando um novo equilíbrio de Stackelberg para o mercado, é possível verificar que a oferta agregada das empresas E_1 e E_2 acompanhará apenas 3/4 da expansão da oferta, obrigando um incremento no preço P .

$$ax = a + \Delta a$$

Substituindo na função da procura a quantidade agregada obtemos:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= a + \Delta a - (q_1 + q_2) \\ &= a + \Delta a - \frac{3a + 3\Delta a - 3c}{4} \\ &= \frac{a + 3c}{4} + \frac{1}{4} \Delta a \\ \hat{P} &= P + \frac{1}{4} \Delta a \\ \hat{Q} &= Q + \frac{3}{4} \Delta a \end{aligned}$$

Para o modelo de Stackelberg essa é a estratégia óptima das empresas, uma vez que oferece a maximização do lucro. Socialmente, tal estratégia representa a utilização de poder de mercado para restringir a oferta e forçar a obtenção de lucros extraordinários, caracterizando um mercado imperfeito.

Consideremos agora a segunda situação. A expansão da oferta deve ser precedida de investimentos produtivos. Suponha que não existem custos ou risco na implementação do investimento e que o tempo investido seja insignificante. A única restrição é que as

empresas devem decidir pela realização de investimentos antes de aumentar a sua oferta privada. Tal decisão pode ser tomada a qualquer momento, mas, uma vez realizada, não pode ser cancelada.

Existem, portanto, duas estratégias possíveis:

1. Esperar, sinalizando com um acordo para elevar os preços do mercado;
2. Tomar a iniciativa de expandir a sua produção privada, desencadeando um novo equilíbrio de Stackelberg;

A Figura 3 ilustra o formato do jogo que representa tal situação. Caso a empresa líder escolha não realizar novos investimentos, a iniciativa é transferida para a empresa seguidora que pode investir ou não. O equilíbrio de Nash ocorre quando os agentes não possuem incentivos para alterar as suas posições do mercado. Nesse caso, podemos considerar três situações:

1. Não ocorrem novos investimentos;
2. A empresa E_2 assume o papel de líder;
3. A empresa E_1 mantém a sua liderança.

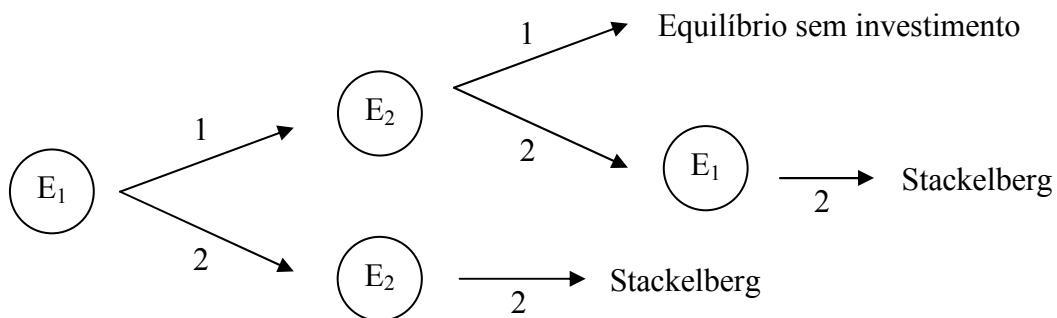


Figura 3: Estratégias possíveis seguidamente da expansão da procura

Os lucros obtidos pelas empresas E_1 e E_2 são dados por:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= (P + \Delta a) q_1 \\ \pi_{12} &= \left(P + \frac{1}{4} \Delta a \right) \left(q_1 + \frac{\Delta a}{4} \right) \\ \pi_{13} &= \left(P + \frac{1}{4} \Delta a \right) \left(q_1 + \frac{\Delta a}{2} \right) \\ \pi_{21} &= \left(P + \frac{\Delta a}{4} \right) q_2 \\ \pi_{22} &= \left(P + \frac{\Delta a}{4} \right) \left(q_2 + \frac{\Delta a}{2} \right) \\ \pi_{23} &= \left(P + \frac{\Delta a}{4} \right) \left(q_2 + \frac{\Delta a}{4} \right)\end{aligned}$$

Verificamos que o lucro da empresa E_1 na situação 2 é inferior ao lucro obtido na situação 3 ($\pi_{12} < \pi_{13}$). Da mesma forma, o lucro da empresa E_2 na situação 2 é superior ao lucro obtido na situação 3 ($\pi_{22} > \pi_{23}$). Logo, π_{12} e π_{23} são opções dominadas. O equilíbrio de Nash vai depender da relação entre os valores de π_{11} e π_{13} e entre os valores de π_{21} e π_{22} . Quando $\pi_{13} > \pi_{11}$, a empresa E_1 realizará novos investimentos.

Ao mesmo tempo, quando o valor de $\pi_{22} > \pi_{21}$, a melhor alternativa da empresa E_1 é investir, não permitindo que a empresa E_2 assuma a liderança.

Os valores de π_{1i} e π_{2i} variam em função da expansão da quantidade procurada.

Dado o equilíbrio de Stackelberg, adoptado como ponto de partida, os parâmetros e variáveis das equações podem ser reescritos em função de Q :

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}Q \\ q_1 = \frac{a-c}{2} = \frac{2}{3}Q \\ q_2 = \frac{1}{3}Q \\ P = \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3}Q = \frac{1}{3}Q \end{cases}$$

Reescrevendo π_{11} e π_{13} em função de Q , temos:

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= \left(\frac{1}{3}Q + \Delta a\right)\frac{2}{3}Q \\ &= \frac{2}{9}Q^2 + \frac{2}{3}\Delta a Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_{13} &= \left(\frac{1}{3}Q + \frac{\Delta a}{4}\right)\left(\frac{2}{3}Q + \frac{\Delta a}{2}\right) \\ &= \frac{2}{9}Q^2 + \frac{1}{3}\Delta a Q + \frac{(\Delta a)^2}{8}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\pi_{11} < \pi_{13} &\Leftrightarrow \frac{2}{9}Q^2 + \frac{2}{3}\Delta a Q < \frac{2}{9}Q^2 + \frac{1}{3}\Delta a Q + \frac{(\Delta a)^2}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\Delta a Q < \frac{(\Delta a)^2}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3}Q < \Delta a\end{aligned}$$

Assim, quando $\frac{8}{3}Q < \Delta a$, o valor de π_{13} domina o de π_{11} , incentivando a empresa E_1 a realizar novos investimentos. Por outro lado,

$$\pi_{21} > \pi_{22} \Leftrightarrow \frac{2}{3}Q > \Delta a$$

Logo, enquanto o incremento Δa não atingir um valor superior a $\frac{2}{3}Q$, o mercado permanece em equilíbrio sem que ocorram novos investimentos. Quando o valor de Δa ultrapassar $\frac{2}{3}Q$, a empresa E_1 exerce a liderança provocando um novo equilíbrio de Stackelberg. A Figura 4 mostra o comportamento típico das curvas de π_{21} e π_{22} .

Quando $\pi_{13} > \pi_{11}$, ou seja, $\frac{8}{3}Q > \Delta a$, a empresa E_1 realizará novos investimentos e paralela quando $\pi_{22} > \pi_{21} \Leftrightarrow \frac{2}{3}Q < \Delta a$ a melhor alternativa da empresa E_1 é investir e assim não permite que a empresa E_2 tome a liderança.

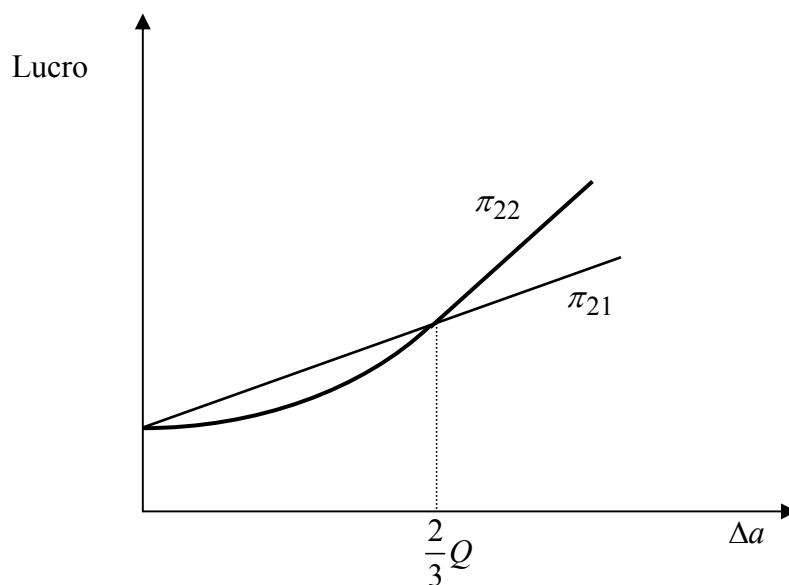


Figura 4: Comportamento do lucro da empresa E_1 em função de Δa

O comportamento dos jogadores, traduz uma trajetória economicamente ineficiente, uma vez que a maximização do lucro é obtida através da utilização do poder de mercado para restringir a oferta e inflacionar o preço. Além disso, os reflexos do preço aumentam a instabilidade do mercado. A Figura 5 ilustra o comportamento dos preços reflectindo a utilização do poder de mercado.

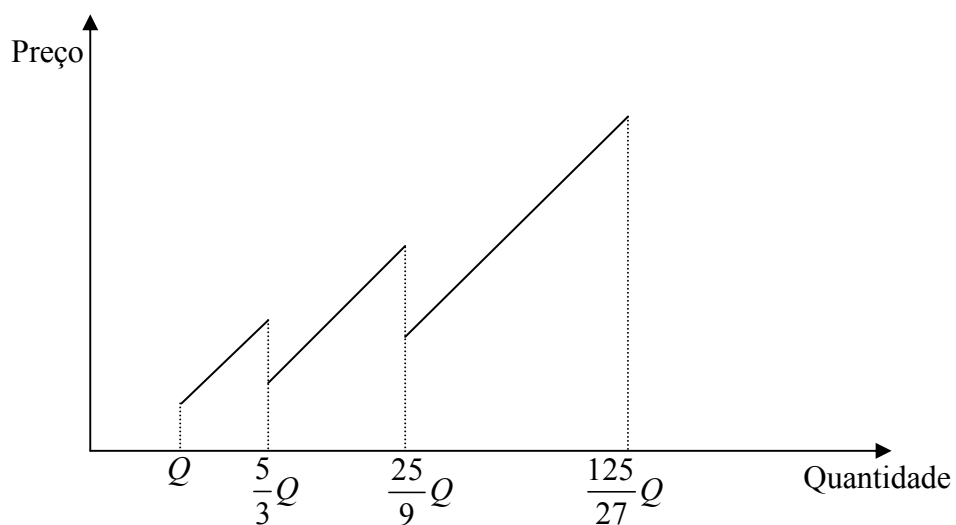


Figura 5: Flutuação do preço em função da quantidade procurada

5.3. Conclusão

O modelo de mercado apresentado não incluiu as diferenças de tempo entre a decisão de investimento, a realização da procura e a incerteza resultante. O objectivo do modelo era identificar os elementos da racionalidade dos jogadores na concorrência e as suas influências na eficiência do mercado. De facto, verificamos que as sinalizações de mercado, expressas através de promessas e ameaças, influenciam o comportamento competitivo dos jogadores, podendo ser incorporadas pelo Estado para contestar o poder de mercado dos oligopólios.

De facto, a permanência das empresas estatais operando sob a lógica pública pode conduzir para uma dinâmica competitiva eficiente.

6. Políticas Ambientais em Competição Internacional

6.1. Introdução

Apesar de vivermos numa economia de mercado, os ambientalistas têm usualmente defendido políticas ambientais que vão contra os princípios básicos de funcionamento desta, optando por soluções onde a legislação e o Estado têm um papel primordial. A preferência por este tipo de políticas significa demasiadas vezes que estas, por não levarem em conta a natureza humana e os interesses dos agentes económicos, acabarão por ter resultados muito aquém do esperado.

É no entanto possível implementar mecanismos no funcionamento de uma economia de mercado, que levam os agentes económicos e os cidadãos em geral, a adoptar um comportamento proactivo na defesa do Meio Ambiente enquanto procuram simultaneamente satisfazer a sua tendência humana para o egoísmo.

Tem-se assistido recentemente a um aumento no número e na importância de debates sobre a liberalização do comércio e os seus efeitos na qualidade ambiental. Os ambientalistas têm referido que o crescimento económico resultante deste comércio implica mais poluição, caso não sejam aplicadas medidas correctivas. Porém, existem receios que os governos que não possam utilizar políticas comerciais, utilizem as suas políticas ambientais para proteger a sua economia, conduzindo, por exemplo, a um excesso de poluição ou produção.

O Ambientalismo do mercado, tal como o nome indica, pretende utilizar os fundamentos da Economia de Mercado e a própria Economia de Mercado como ferramenta para atingir a protecção do Meio Ambiente. O tipo de soluções inovadoras, propostas pelo Ambientalismo de Mercado, segundo Robert Stavins da Universidade de Harvard, pode ser classificado em quatro categorias: esquemas de troca de quotas, impostos ambientais, redução dos subsídios do governo e eliminação de barreiras ao funcionamento do mercado.

A qualidade ambiental também pode ser afectada pelas políticas de privatização de empresas (cf. Ohori, 2004)). Em vários países é possível identificar indústrias oligopolísticas, com empresas públicas e privadas a competir internacionalmente. Neste trabalho, pretendemos estudar os efeitos de privatização, incorporando impostos ambientais e políticas comerciais em mercados internacionais. ((Baumol e Oates, 1988), (Copeland, 1996), (Ludema e Wooton, 1994) e (Markusen, 1975)) estudaram os efeitos de políticas comerciais no controlo da poluição. Aqui, comparamos os efeitos causados na

qualidade ambiental por empresas públicas e privadas em competição internacional. Modelos de oligopólio misto (isto é, com empresas públicas e privadas), em contexto doméstico, foram estudados por (Barros, 1995), (Beato e Mas-Collel, 1984), (De Fraja e Delbono, 1989,1990), (Matsumura, 1998) e (Nishimori e Ogawa, 2002); e em contexto estrangeiro, por (Fjell e Heywood, 2002), (Fjell e Pal, 1996), (Pal e White, 1998) e (Serizawa, 2000)). Para o nosso estudo, consideramos um modelo de duopólio (misto), com uma empresa pública num país e uma empresa privada noutra país, que competem nos mercados de ambos os países. O objectivo da empresa pública é maximizar o bem-estar social do seu país, enquanto que o da empresa privada é maximizar o seu próprio lucro. O modelo incorpora impostos ambientais e taxas de importação.

No modelo aqui apresentado consideramos uma função de procura mais generalizada do que a do modelo de (Ohori, 2004). Adoptando como solução o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, concluímos que os níveis do excedente do consumidor, dos danos ambientais e do bem-estar social são mais elevados no país onde está localizada a empresa pública do que no país onde está localizada a empresa privada (cf. Ohori, S., 2004).

6.2. O Modelo

Vamos considerar neste modelo a função de procura inversa que é dado por:

$$P_i = a - bQ_i$$

onde a é uma constante que representa a quantidade de saturação do mercado, b é o declive da recta da procura e $Q_i = h_i + e_j$ é a quantidade agregada no país i , $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$. Os custos marginais de produção c são constantes e não têm custos fixos.

Consideremos dois países, ou seja, o país 1 que representa a empresa pública (E_1 - empresa doméstica) e o país 2 representa a empresa privada (E_2 - empresa estrangeira).

O governo de cada país impõe um imposto ambiental t para controlar a poluição e uma taxa μ para regular a importação de um bem. Em cada país, existe uma única empresa que fornece, concorrencialmente, um certo bem homogéneo para o mercado nacional e para o estrangeiro. Assumimos que as empresas geram uma unidade de poluição por cada unidade produzida. A quantidade produzida pela empresa E_1 , é $y_1 = h_1 + e_1$ e pela empresa E_2 é $y_2 = h_2 + e_2$, onde h_1 , h_2 , e_1 e e_2 denotam as quantidades produzidas pelas empresas E_1 e E_2 , respectivamente, para o mercado nacional e estrangeiro. Assim, a empresa E_1 terá

como objectivo maximizar o bem-estar social, enquanto que o objectivo da empresa estrangeira será maximizar o seu próprio lucro. Em cada país, os consumidores adquirem o bem no mercado doméstico. A quantidade total consumida no país 1 é $Q_1 = h_1 + e_2$ e no país 2 $Q_2 = h_2 + e_1$.

Logo, a função de procura das duas empresas é dada por:

$$P_1 = a - bQ = a - b(h_1 + e_2) \quad \text{e} \quad P_2 = a - bQ = a - b(h_2 + e_1)$$

O lucro obtido no país 1 e no país 2 com as vendas nesse país da quantidade produzida para consumo interno e dado por:

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= (p_1 - t_1 - c)h_1 \\ &= (a - b(h_1 + e_2) - t_1 - c)h_1 \\ \pi_{21} &= (p_2 - t_2 - c)h_2 \\ &= (a - b(h_2 + e_1) - t_2 - c)h_2 \end{aligned}$$

O lucro obtido com as exportações para o país 2 é dado por:

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= \frac{1}{2}(p_2 - t_1 - \mu_2 - c)e_1 \\ &= \frac{1}{2}(a - b(h_2 + e_1) - t_1 - \mu_2 - c)e_1 \\ \pi_{22} &= \frac{1}{2}(p_1 - t_2 - \mu_1 - c)e_2 \\ &= \frac{1}{2}(a - b(h_1 + e_2) - t_2 - \mu_1 - c)e_2 \end{aligned}$$

O lucro total das empresas E_1 e E_2 é dado por:

$$\pi_1 = \pi_{11} + \pi_{12} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \pi_{21} + \pi_{22}$$

O excedente do consumidor é dado por:

$CS_1 = \frac{b}{2}q_1^2 \Leftrightarrow CS_1 = \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2$ e $CS_2 = \frac{b}{2}q_2^2 \Leftrightarrow CS_2 = \frac{b}{2}(h_2 + e_1)^2$. A função de danos ambientais é dada por $D_1 = d \cdot y_1 \Leftrightarrow D_1 = d(h_1 + e_1)$ e $D_2 = d \cdot y_2 \Leftrightarrow D_2 = d(h_2 + e_2)$, onde $d > 1$.

O bem-estar social no país 1, e dado por:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= CS_1 + \pi_1 + t_1 y_1 - D_1 + \mu_1 e_2 \\
 &= \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2 + (a - b(h_1 + e_2) - t_1 - c)h_1 + \frac{1}{2}(a - b(h_2 + e_1) - t_1 - \mu_2 - c)e_1 + \\
 &\quad + t_1(h_1 + e_1) - d(h_1 + e_1) + \mu_1 e_2
 \end{aligned}$$

onde a 1ª parcela representa o excedente do consumidor, que corresponde à diferença entre o montante que o consumidor estaria disposto a pagar por determinada quantidade de um bem e o montante que efectivamente paga, a 2ª parcela o lucro obtido pela quantidade vendida no próprio país, a 3ª parcela corresponde ao lucro obtido pela quantidade vendida no outro país e a 4ª parcela é o valor obtido pela aplicação da taxa à quantidade exportada pela empresa E_2 .

A função lucro da empresa E_2 é dada por:

$$\begin{aligned}
 \pi_2 &= \pi_{21} + \pi_{22} \\
 &= (a - b(h_2 + e_1) - t_2 - c)h_2 + \frac{1}{2}(a - b(h_1 + e_2) - t_2 - \mu_1 - c)e_2
 \end{aligned}$$

Como foi referido anteriormente, a empresa E_1 escolhe a quantidade que vai produzir de modo a maximizar o bem-estar social do país doméstico, e a empresa E_2 escolhe a quantidade que vai produzir de modo a maximizar o seu próprio lucro. A estrutura do jogo é a seguinte: Na primeira etapa, os governos decidem, simultaneamente, os impostos ambientais e as taxas sobre os produtos importados. Na segunda etapa, as empresas competem à la Cournot, isto é, decidem, simultaneamente, as respectivas quantidades a produzir.

Maximizando as condições de primeira ordem do bem-estar social da empresa E_1 e as condições de primeira ordem do lucro da empresa E_2 obtemos as quantidades produzidas pelas empresas E_1 e E_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial h_1} = 0 \\ \frac{\partial W_1}{\partial e_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial h_2} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial e_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -bh_1 + a - c - d = 0 \\ -\frac{bh_2 + 2be_1 - a + c + 2d - t_1 + \mu_2}{2} = 0 \\ -2bh_2 - be_1 + a - c - t_2 = 0 \\ -\frac{bh_1 - a + 2be_2 + c + t_2 + \mu_1}{2} = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \frac{a - c - d}{b} \\ e_1 = \frac{a - c - 2d + t_1 - bh_2 - \mu_2}{2b} \\ h_2 = \frac{a - c - t_2 - be_1}{2b} \\ e_2 = \frac{a - c - t_2 - \mu_1 - bh_1}{2b} \end{cases}$$

Na primeira etapa, vamos obter h_1 , h_2 , e_1 e e_2 em função de t_1 , t_2 , μ_1 e μ_2

$$\begin{cases} h_1 = \frac{a - c - d}{b} \\ e_1 = \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \\ h_2 = \frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} \\ e_2 = \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \end{cases}$$

Sabendo que $\alpha = a - c - d$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = \frac{\alpha}{b} \\ e_1 = \frac{\alpha - 3d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \\ h_2 = \frac{\alpha + 3d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} \\ e_2 = \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \end{array} \right.$$

6.3. Análise estática

Maximizando as condições de primeira ordem dos níveis de exportação da empresa E_1 e E_2 em ordem a μ_1 e μ_2 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial e_2}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{2b} < 0$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \mu_2} = -\frac{2}{3b} < 0$$

Os níveis de exportação da empresa pública doméstica e da empresa privada estrangeira estão negativamente relacionados com as taxas impostas pelo outro governo $\left(\frac{\partial e_1}{\partial \mu_2} < 0 \right)$ e, ou seja, quando as taxas aumentam os níveis de exportação diminuem $\left(\frac{\partial e_2}{\partial \mu_1} < 0 \right)$.

Maximizando as condições de primeira ordem do preço doméstico das empresas E_1 e E_2 em ordem a μ_1 e μ_2 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{2} > 0$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \mu_2} = \frac{1}{2} > 0$$

Maximizando as condições de primeira ordem do consumo doméstico da empresa E_1 e E_2 em ordem a μ_1 e μ_2 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial q_1}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{2b} < 0$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{2b} < 0$$

Maximizando as condições de primeira ordem do excedente do consumidor da empresa E_1 e E_2 em ordem a μ_1 e μ_2 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial CS_1}{\partial \mu_1} < 0$$

$$\frac{\partial CS_2}{\partial \mu_2} < 0$$

Maximizando as condições de primeira ordem do imposto ambiental da empresa E_1 e E_2 em ordem a t_1 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_1} = \frac{2}{3b} > 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t_1} = -\frac{1}{3b} < 0$$

Se as taxas aumentam o preço doméstico também aumenta $\left(\frac{\partial p_1}{\partial \mu_1} > 0 \text{ e } \frac{\partial p_2}{\partial \mu_2} > 0\right)$, uma vez

que provocam uma diminuição do consumo doméstico $\left(\frac{\partial q_1}{\partial \mu_1} < 0\right)$. Deste modo, o

excedente do consumidor diminui com a taxa de importação $\left(\frac{\partial CS_1}{\partial \mu_1} < 0\right)$. Das equações

h_1, h_2, e_1 e e_2 também concluímos que um imposto ambiental determinado pelo governo

doméstico leva a que a empresa pública doméstica aumente a sua produção $\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} > 0\right)$ e a

empresa privada estrangeira reduza a sua produção $\left(\frac{\partial y_2}{\partial t_1} < 0\right)$. Estes resultados são interessantes, pois, de acordo com a literatura clássica sobre a economia ambiental, seria de esperar que um aumento do imposto ambiental provocasse uma diminuição da produção das empresas domésticas e um aumento da produção das empresas estrangeiras. A intuição para este resultado é a seguinte:

A função de reacção da empresa doméstica é:

$$\begin{cases} h_1 = \frac{a-c-d}{b} \\ e_1 = \frac{a-c-2d+t_1-bh_2-\mu_2}{2b} \\ h_2 = \frac{a-c-t_2-be_1}{2b} \\ e_2 = \frac{a-c-t_2-\mu_1-bh_1}{2b} \end{cases}$$

Substituindo h_1 , h_2 , e_1 e e_2 nas quantidades produzidas pelas empresas E_1 e E_2 obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 + e_1 \\ &= \frac{a-c-d}{b} + \frac{a-c-2d+t_1-bh_2-\mu_2}{2b} \\ &= \frac{a-c-d}{b} + \frac{a-c-2d+t_1-\mu_2}{2b} - \frac{bh_2}{2b} \\ &= \frac{3a-d+t_1-\mu_2}{2b} - \frac{h_2}{2} \\ \\ y_2 &= h_2 + e_2 \\ &= \frac{a-c-t_2-be_1}{2b} + \frac{a-c-t_2-\mu_1-bh_1}{2b} \\ &= \frac{2a-2c-2d+2d-2t_2-\mu_1}{2b} - \frac{b(e_1+h_1)}{2b} \\ &= \frac{2a+2d-2t_2-\mu_1}{2b} - \frac{y_1}{2} \end{aligned}$$

Daqui concluímos que um aumento no imposto ambiental aumenta a produção da empresa pública doméstica e diminui a produção da empresa privada estrangeira. Assim, o imposto ambiental é um instrumento estratégico para o governo do país doméstico

distribuir a produção da empresa privada estrangeira para a empresa pública doméstica. Um efeito adicional do imposto ambiental doméstico é a redução da produção da empresa privada estrangeira para consumo local, expandindo desta forma, o mercado estrangeiro para a empresa pública doméstica.

Contudo, observamos que um aumento na produção leva a um aumento nos danos ambientais locais; conseqüentemente, a imposição de um imposto ambiental pelo governo doméstico é paradoxalmente incluído nas razões do aumento dos danos ambientais locais, que resulta na redução do bem-estar social. Por outras palavras, o imposto ambiental no país doméstico pode ser usado para diminuir a distorção devida a competição imperfeita, em vez de contribuir para um melhoramento do ambiente. Assim, o imposto ambiental óptimo dependerá dos dois efeitos conflituosos: o efeito da distribuição da produção provocada pelo aumento da produção total da empresa doméstica, e o efeito do aumento da poluição provocado pelo aumento dos danos ambientais locais associado com o aumento do nível total de produção. Além disso, observamos que o efeito do imposto ambiental determinado pelo país estrangeiro na produção total da empresa pública doméstica é

positivo $\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_2} > 0\right)$ e na produção total da empresa privada estrangeira $\left(\frac{\partial y_2}{\partial t_2} < 0\right)$.

Derivando as condições de primeira ordem do imposto ambiental da empresa E_1 e E_2 em ordem a t_2 obtemos o seguinte:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_2} = \frac{1}{3b} > 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t_2} = -\frac{7}{6b} < 0$$

Analisemos, agora, a primeira etapa. Nesta etapa, cada governo estabelece os valores óptimos para o imposto ambiental e para a taxa de importação, de forma a maximizar o bem-estar social definido pela equação $\pi_{12} = \frac{1}{2}(p_2 - t_1 - \mu_2 - c)e_1$. As decisões óptimas são dadas por:

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{b}{2}(h_1 + e_2)^2 + (a - b(h_1 + e_2) - t_1 - c)h_1 + \frac{1}{2}(a - b(h_2 + e_1) - t_1 - \mu_2 - c)e_1 + \\ & + t_1(h_1 + e_1) - d(h_1 + e_1) + \mu_1 e_2 \end{aligned}$$

$$W_2 = \frac{b}{2} (h_2 + e_1)^2 + (a - b (h_2 + e_1) - t_2 - c)h_2 + \frac{1}{2}(a - b (h_1 + e_2) - t_2 - \mu_1 - c)e_2 + \\ + t_2(h_2 + e_2) - d (h_2 + e_2) + \mu_2 e_1$$

Substituindo $h_1 = \frac{a - c - d}{b}$, $h_2 = \frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b}$, $e_1 = \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b}$

e $e_2 = \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b}$ nas equações W_1 e W_2 , obtemos:

$$W_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{a - c - d}{b} + \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right)^2 + \left(a - b \left(\frac{a - c - d}{b} + \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right) - t_1 - c \right) \left(\frac{a - c - d}{b} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(a - b \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} + \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right) - t_1 - \mu_2 - c \right) \left(\frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right) + \\ + t_1 \left(\frac{a - c - d}{b} + \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right) - d \left(\frac{a - c - d}{b} + \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right) + \\ + \mu_1 \left(\frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right)$$

$$W_2 = \frac{b}{2} \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} + \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right)^2 + \\ + \left(a - b \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} + \frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right) - t_2 - c \right) \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(a - b \left(\frac{a - c - d}{b} + \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right) - t_2 - \mu_1 - c \right) \left(\frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right) + \\ + t_2 \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} + \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right) - d \left(\frac{a - c + 2d - t_1 - 2t_2 + \mu_2}{3b} + \frac{d - t_2 - \mu_1}{2b} \right) + \\ + \mu_2 \left(\frac{a - c - 4d + 2t_1 + t_2 - 2\mu_2}{3b} \right)$$

Vamos maximizar as equações do bem-estar social obtidas anteriormente, adquirindo assim as equações das decisões ótimas:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W_1}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial W_1}{\partial \mu_1} = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial t_2} = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial \mu_2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2(a-c-4d+2t_1+t_2-2\mu_2)}{9b} = 0 \\ \frac{d-t_2-3\mu_1}{4b} = 0 \\ \frac{-4a+4c+17d-13t_2-3\mu_1+4\mu_2}{12b} = 0 \\ \frac{a-c-3d+t_1+t_2-3\mu_2}{3b} = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_1 = -\frac{2a-2c-13d}{11} \\ \mu_1 = \frac{a-c-d}{11} \\ t_2 = -\frac{3a-3c-14d}{11} \\ \mu_2 = \frac{2(a-c-d)}{11} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{t}_1 = d - \frac{2\alpha}{11} \\ \hat{\mu}_1 = \frac{\alpha}{11} \\ \hat{t}_2 = d - \frac{3\alpha}{11} \\ \hat{\mu}_2 = \frac{2\alpha}{11} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Para garantir que os valores de t_1 , μ_1 , t_2 e μ_2 são máximos é necessário derivar as condições de segunda ordem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W_1}{\partial^2 t_1} < 0 \\ \frac{\partial^2 W_1}{\partial^2 \mu_1} < 0 \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial^2 t_2} < 0 \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial^2 \mu_2} < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{9b} < 0 \\ -\frac{3}{4b} < 0 \\ -\frac{13}{12b} < 0 \\ -\frac{1}{b} < 0 \end{array} \right.$$

Utilizando as igualdades, $\hat{t}_1 = d - \frac{2\alpha}{11}$ e $\hat{t}_2 = d - \frac{3\alpha}{11}$, $\hat{\mu}_1 = \frac{\alpha}{11}$ e $\hat{\mu}_2 = \frac{2\alpha}{11}$ nas equações $h_1 = \frac{\alpha}{b}$ e $h_2 = \frac{\alpha + 3d - \hat{t}_1 - 2\hat{t}_2 + \hat{\mu}_2}{3b}$, $e_1 = \frac{\alpha - 3d + 2\hat{t}_1 + \hat{t}_2 - 2\hat{\mu}_2}{3b}$ e $e_2 = \frac{d - \hat{t}_2 - \hat{\mu}_1}{2b}$

obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2: As quantidades ótimas a serem produzidas por cada empresa para o mercado doméstico e para exportação são, respectivamente, dadas por:

$$\hat{h}_1 = \frac{\alpha}{b}$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_2 &= \frac{\alpha + 3d - d + \frac{2\alpha}{11} - 2d + \frac{6\alpha}{11} + \frac{2\alpha}{11}}{3b} \\ &= \frac{7\alpha}{11b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \frac{\alpha - 3d + 2d - \frac{4\alpha}{11} + d - \frac{3\alpha}{11} - \frac{4\alpha}{11}}{3b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_2 &= \frac{d - d + \frac{3\alpha}{11} - \frac{\alpha}{11}}{2b} \\ &= \frac{\alpha}{11b} \end{aligned}$$

Do Teorema 2 resulta que a empresa pública doméstica não tem incentivo para exportar o bem sob valores ótimos de impostos ambientais e de taxas de exportação. Além disso, em equilíbrio, o nível de produção da empresa pública doméstica é superior ao da empresa privada estrangeira.

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 > \hat{y}_2 &\Leftrightarrow \hat{h}_1 + \hat{e}_1 > \hat{h}_2 + \hat{e}_2 \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{b} + 0 > \frac{7\alpha}{11b} + \frac{\alpha}{11b} \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{b} > \frac{8\alpha}{11b}
\end{aligned}$$

Deste modo, o nível de consumo no mercado doméstico é superior ao do mercado estrangeiro.

$$\begin{aligned}
\hat{q}_1 > \hat{q}_2 &\Leftrightarrow \hat{h}_1 + \hat{e}_2 > \hat{h}_2 + \hat{e}_1 \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{b} + \frac{\alpha}{11b} > \frac{7\alpha}{11b} + 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{12\alpha}{11b} > \frac{7\alpha}{11b}
\end{aligned}$$

Utilizando as igualdades $\hat{t}_1 = d - \frac{2\alpha}{11}$ e $\hat{t}_2 = d - \frac{3\alpha}{11}$, $\hat{\mu}_1 = \frac{\alpha}{11}$ e $\hat{\mu}_2 = \frac{2\alpha}{11}$, $\hat{h}_1 = \frac{\alpha}{b}$ e

$\hat{h}_2 = \frac{7\alpha}{11b}$, $\hat{e}_1 = 0$ e $\hat{e}_2 = \frac{\alpha}{11b}$ nas equações do lucro

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= (p_1 - t_1 - c)h_1 \\
&= (a - b(h_1 + e_2) - t_1 - c)h_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{12} &= \frac{1}{2}(p_2 - t_1 - \mu_2 - c)e_1 \\
&= \frac{1}{2}(a - b(h_2 + e_1) - t_1 - \mu_2 - c)e_1
\end{aligned}$$

obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3: Em equilíbrio, os valores do excedente do consumidor, \hat{CS}_1 , nível de danos ambientais, \hat{D}_i , lucro de cada empresa, $\hat{\pi}_i$, e bem-estar social, \hat{W}_i , em cada país são dadas por:

$$\begin{aligned}
CS_1 &= \frac{1}{2}b(\hat{h}_1 + \hat{e}_2)^2 \\
&= \frac{1}{2}b\left(\frac{\alpha}{b} + \frac{\alpha}{11b}\right)^2 \\
&= \frac{72\alpha^2}{121b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CS_2 &= \frac{1}{2}b(\hat{h}_2 + \hat{e}_1)^2 \\
&= \frac{1}{2}b\left(\frac{7\alpha}{11b} + 0\right)^2 \\
&= \frac{49\alpha^2}{242b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_1 &= d\hat{y}_1 \\
&= d(\hat{h}_1 + \hat{e}_1) \\
&= d\left(\frac{\alpha}{b} + 0\right) \\
&= \frac{\alpha d}{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_2 &= d\hat{y}_2 \\
&= d(\hat{h}_2 + \hat{e}_2) \\
&= d\left(\frac{7\alpha}{11b} + \frac{\alpha}{11b}\right) \\
&= \frac{8\alpha d}{11b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_1 &= (a - b(\hat{h}_1 + \hat{e}_2) - \hat{t}_1 - c)\hat{h}_1 + \frac{1}{2}(a - b(\hat{h}_2 + \hat{e}_1) - \hat{t}_1 - \hat{\mu}_2 - c)\hat{e}_1 \\
&= \left(a - b\left(\frac{\alpha}{b} + \frac{\alpha}{11b}\right) - d + \frac{2\alpha}{11} - c\right)\frac{\alpha}{b} + \frac{1}{2}\left(a - b\left(\frac{7\alpha}{11b} + 0\right) - d + \frac{2\alpha}{11} - \frac{2\alpha}{11} - c\right) \times 0 \\
&= \frac{\alpha^2}{11b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_2 &= (a-b(\hat{h}_2+\hat{e}_1)-\hat{t}_2-c)\hat{h}_2 + \frac{1}{2}(a-b(\hat{h}_1+\hat{e}_2)-\hat{t}_2-\hat{\mu}_1-c)\hat{e}_2 \\
&= \left(a-b\left(\frac{7\alpha}{11b}+0\right)-d+\frac{3\alpha}{11}-c\right)\frac{7\alpha}{11b} + \frac{1}{2}\left(a-b\left(\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{11b}\right)-d+\frac{3\alpha}{11}-\frac{\alpha}{11}-c\right)\frac{\alpha}{11b} \\
&= \frac{9\alpha^2}{22b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{W}_1 &= \frac{1}{2}b(\hat{h}_1+\hat{e}_2)^2 + (a-b(\hat{h}_1+\hat{e}_2)-\hat{t}_1-c)\hat{h}_1 + \frac{1}{2}(a-b(\hat{h}_2+\hat{e}_1)-\hat{t}_1-\hat{\mu}_2-c)\hat{e}_1 + \\
&\quad + \hat{t}_1(\hat{h}_1+\hat{e}_1)-d(\hat{h}_1+\hat{e}_1)+\hat{\mu}_2\hat{e}_2 \\
&= \frac{1}{2}b\left(\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{11b}\right)^2 + \left(a-b\left(\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{11b}\right)-d+\frac{2\alpha}{11}-c\right)\frac{\alpha}{b} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(a-b\left(\frac{7\alpha}{11}+0\right)-d+\frac{2\alpha}{11}-\frac{2\alpha}{11}-c\right)\times 0 + \left(d-\frac{2\alpha}{11}\right)\left(\frac{\alpha}{b}+0\right)- \\
&\quad -d\left(\frac{\alpha}{b}+0\right)+\frac{\alpha}{11}\frac{\alpha}{11b} \\
&= \frac{62\alpha^2}{121b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{W}_2 &= \frac{1}{2}b(\hat{h}_2+\hat{e}_1)^2 + (a-b(\hat{h}_2+\hat{e}_1)-\hat{t}_2-c)\hat{h}_2 + \frac{1}{2}(a-b(\hat{h}_1+\hat{e}_2)-\hat{t}_2-\hat{\mu}_1-c)\hat{e}_2 + \\
&\quad + \hat{t}_2(\hat{h}_2+\hat{e}_2)-d(\hat{h}_2+\hat{e}_2)+\hat{\mu}_1\hat{e}_1 \\
&= \frac{1}{2}b\left(\frac{7\alpha}{11b}+0\right)^2 + \left(a-b\left(\frac{7\alpha}{11b}+0\right)-d+\frac{3\alpha}{11}-c\right)\frac{7\alpha}{11b} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(a-b\left(\frac{\alpha}{b}+\frac{\alpha}{11b}\right)-d+\frac{3\alpha}{11}-\frac{\alpha}{11}-c\right)\frac{\alpha}{11b} + \left(d-\frac{3\alpha}{11}\right)\left(\frac{7\alpha}{11b}+\frac{\alpha}{11b}\right)- \\
&\quad -d\left(\frac{7\alpha}{11b}+\frac{\alpha}{11b}\right)+\frac{2\alpha}{11}\times 0 \\
&= \frac{50\alpha^2}{121b}
\end{aligned}$$

Deste teorema resulta o seguinte corolário:

Corolário 1: Em equilíbrio, verificam-se as seguintes desigualdades:

$$C\hat{S}_1 > C\hat{S}_2, \quad \hat{D}_1 > \hat{D}_2, \quad \hat{W}_1 > \hat{W}_2, \quad e \quad \hat{\pi}_1 < \hat{\pi}_2$$

Concluimos, assim, que, em equilíbrio, o excedente do consumidor, o nível de danos ambientais e o bem-estar social são maiores no país doméstico do que no país estrangeiro, o que se deve ao facto de os níveis de produção e de consumos óptimos serem maiores no

país doméstico do que no país estrangeiro. Observamos também que, em equilíbrio, o lucro da empresa pública doméstica é inferior ao lucro da empresa privada estrangeira. Este resultado deve-se ao facto da empresa pública doméstica actuar de modo a maximizar o bem-estar social doméstico em vez do seu próprio lucro, ao passo que a empresa privada estrangeira actua de modo a maximizar o seu próprio lucro.

6.4. Um exemplo numérico

Nesta secção, apresentamos um exemplo numérico. Fixamos os parâmetros $a=10$, $b=1$ e $c=5$ e analisamos os resultados obtidos em equilíbrio para diferentes valores marginais dos danos ambientais: $d=1,5$; $d=2,5$ e $d=4,5$. As tabelas I e II seguintes apresentam os resultados numéricos.

Tabela 2 – Implicações do aumento do valor marginal dos danos ambientais.

	\hat{t}_1	\hat{t}_2	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	\hat{h}_1	\hat{h}_2	\hat{e}_1	\hat{e}_2
$d = 3,5$	0,864	0,545	0,318	0,636	3,500	2,227	0	0,318
$d = 4$	2,045	1,818	0,227	0,455	2,500	1,591	0	0,227
$d = 5,5$	4,409	4,364	0,045	0,091	0,500	0,318	0	0,045

Tabela 3 – Implicações do aumento do valor marginal dos danos ambientais (continuação).

	$C\hat{S}_1$	$C\hat{S}_2$	\hat{D}_1	\hat{D}_2	$\hat{\pi}_1$	$\hat{\pi}_2$	\hat{W}_1	\hat{W}_2
$d = 3,5$	7,289	2,460	5,250	3,818	1,114	5,011	6,277	5,062
$d = 4$	3,719	1,265	6,250	4,545	0,568	2,557	3,202	2,583
$d = 5,5$	0,149	0,051	2,250	1,636	0,023	0,102	0,128	0,103

Da observação das tabelas supra, constatamos que um aumento do valor marginal dos danos ambientais leva a um aumento do imposto ambiental e a uma diminuição das taxas de importação; além disso, verifica-se um decréscimo dos níveis de produção de ambas as empresas, e conseqüentemente diminuição dos respectivos lucros e dos níveis do bem-estar social de cada país.

6.5. Conclusão

A análise apresentada mostra os efeitos de impostos ambientais e de taxas de importação numa competição internacional entre uma empresa pública e uma empresa privada. Calculámos os valores desses impostos, bem como os níveis de produção de ambas as empresas, de acordo com o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Mostrámos que o excedente do consumidor, o nível de danos ambientais e o nível do bem-estar social são maiores no país da empresa pública do que no país da empresa privada. Além disso, apresentámos um exemplo numérico que ilustra os resultados referidos e ainda as implicações de um aumento do valor marginal dos danos ambientais.

7. Impacto do bem-estar social de uma empresa sem fins lucrativos num mercado misto

7.1. Introdução

O fenómeno dos mercados mistos, onde as empresas competem com objectivos diferentes, tem atraído um grande interesse nos últimos tempos. Em particular, os mercados comerciais mistos, onde as empresas sem fins lucrativos (NPO) operam são importantes, pois tem-se verificado um aumento significativo da quota de actividade económica, quer em termos de produção quer em termos de empregabilidade (confrontando (Goering, 2008), (Case, 2005), (Weisbrod, 1997) e (Schiff e Weisbrod, 1991)).

Podemos identificar nos dias de hoje, e prever para o futuro, vários mercados em que interagem empresas sem fins lucrativos, empresas privadas e empresas públicas.

As funções objectivos destes três tipos de empresas são obviamente diferentes. As empresas de gestão pública são tipicamente assumidas para maximizar o bem-estar social (os lucros da indústria, mais o excedente do consumidor), as empresas privadas, claro, maximizam os seus próprios lucros, mas os objectivos das NPO poderão ser considerados de formas diversas. Os objectivos das NPO têm sido, de facto, modelados de várias formas, por diferentes autores (cf. (Mique e Belanger, 1974), (James, 1983), (Hansmann, 1980, 1987), (Schiff e Weisbrod, 1991), (Du Bois et al., 2004), (Case, 2005) e (Goering, 2007)).

Neste capítulo, seguindo (Goering, 2007), supomos que uma actividade comercial NPO em termos de objectivos, numa situação intermédia, entre empresas exclusivamente privadas e empresas (públicas) operadas pelo governo. Portanto, supomos que a NPO com actividades comerciais procuram maximizar os seus lucros e o excedente do consumidor para os interessados. Assim, as NPO mostram uma preocupação social em termos do excedente do consumidor dos seus membros, que os diferencia de um fim puramente lucrativo. Contudo, como não olham para os lucros da totalidade do mercado (lucros de outras empresas) ou o excedente total do consumidor (apenas consideram os clientes/membros), também não agem como empresas públicas.

Neste cenário, onde as NPO mostram este tipo de preocupação social, a questão é perceber quão eficazes são nestes ambientes de mercados mistos. Por outras palavras, a existência de tais empresas comerciais sem fins lucrativos em mercados mistos aumenta ou diminui o bem-estar social?

A chave para este problema é a eficiência técnica das NPO relativamente às outras empresas. Se a NPO for menos eficiente do que, as empresas privadas, será o bem-estar social melhorado quando a NPO mostra mais preocupação social?

Em (Goering, 2008), são apontadas várias razões, nomeadamente estruturais, que podem justificar que as NPO sejam, tecnicamente, menos eficiente do que empresas privadas ou públicas. Por outro lado, são também referenciadas razões que levem a uma situação inversa, isto é, de modo a que as NPO sejam, tecnicamente, mais eficientes do que empresas privadas ou públicas.

Uma vez que, num mercado misto é admissível a existência de qualquer ranking de eficiência técnica entre os três tipos de empresas (sem fins lucrativos, privada e pública), vamos analisar o impacto da eficiência técnica num modelo de Cournot com custos marginais de produção constantes. Vamos estudar três diferentes mercados mistos: (i) a concorrência entre uma NPO e uma empresa privada; (ii) a concorrência entre uma NPO e uma empresa pública; e (iii) um cenário final que inclui todos os três tipos de empresas. Descobrimos que a eficiência técnica da NPO face à empresa privada é crucial para estudar a variação do bem-estar social em função da importância atribuída pela NPO ao excedente dos seus clientes. Em particular, verificamos que se a NPO é tecnicamente menos eficiente do que a empresa privada ou do que a empresa pública, o bem-estar social pode realmente diminuir, se a NPO, apresentar uma maior preocupação social para com os seus clientes. Além disso, também mostramos que a eficiência de uma empresa privada tem impacto sobre a eficiência do mercado misto, apenas na ausência de uma empresa pública.

7.2. Modelo de Cournot com empresas sem fins lucrativos, empresas privadas e empresas públicas

Como em (Goering, 2007), consideramos um mercado à la Cournot onde uma empresa sem fins lucrativos (NPO) compete:

- a) com uma empresa privada;
- b) com uma empresa pública; ou
- c) com uma empresa privada e uma pública.

A função de procura linear inversa no mercado é dada por,

$$P = a - bQ = a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}), \quad (5)$$

onde Q é a quantidade agregada do mercado, $q_{np} \geq 0$ é a quantidade produzida pela empresa NPO, $q_p \geq 0$ é a quantidade produzida pela empresa pública e $q_{fp} \geq 0$ a quantidade produzida pela empresa privada.

Assumimos que os custos marginais de produção são constantes: $c_{np}, c_{fp}, c_p \geq 0$. O estudo das três diferentes configurações de mercado misto acima referidas permite-nos explorar o impacto das mudanças nas eficiências tecnológicas relativas dos três tipos de empresas, numa grande variedade de configurações de mercado misto.

Dada a função de procura linear inversa (5) e com os pressupostos de custos apresentados acima, as funções objectivo da empresa privada, da empresa pública e da NPO são, respectivamente:

$$\text{Max}_{q_{fp}} \pi_{fp} = \text{Max}_{q_{fp}} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{fp} \right) q_{fp}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_p} W_p = & \text{Max}_{q_p} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_p \right) q_p + \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{np} \right) q_{np} + \\ & + \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{fp} \right) q_{fp} + \frac{b(q_{np} + q_p + q_{fp})^2}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Max}_{q_{np}} V_{np} = \text{Max}_{q_{np}} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{np} \right) q_{np} + \frac{\theta b(q_{np} + q_p + q_{fp})^2}{2}. \quad (8)$$

A equação (6) é simplesmente o problema de maximização do lucro da empresa privada. A empresa pública maximiza uma função objectivo (7) de bem-estar social, que inclui todos os possíveis retornos na forma de lucro para as três empresas acrescido do excedente do consumidor no mercado. Na expressão (8), estamos a supor que a NPO pretende maximizar os lucros mais o excedente do consumidor dos seus clientes. Assim, o parâmetro $0 \leq \theta \leq 1$ é a percentagem do excedente total do mercado que é capturado pelos clientes da NPO. Se os clientes da NPO capturam o excedente total do mercado, então

$\theta = 1$. Se, por outro lado, nada do excedente do consumidor reverte para os clientes da NPO, então $\theta = 0$.

Isto permite-nos especificar uma função objectivo NPO comercial como uma simples combinação de parametrizada de lucros e excedente do consumidor. A inclusão de uma percentagem do excedente do consumidor do mercado também pode ser pensada como o interesse social atribuído às empresas públicas. Notemos, no entanto, que a NPO não considera os lucros de qualquer empresa rival nem tem em conta o excedente do mercado que não reverte a favor dos seus clientes. Assim, a sua função objectiva difere quer de uma empresa privada quer de uma empresa pública.

Dadas as funções objectivo em (6) - (8), vamos agora analisar os três diferentes casos de oligopólio misto e identificar as condições de eficiência tecnológica sobre as quais o do peso θ do aspecto social considerado pela NPO faz diminuir ou aumentar o bem-estar social total.

7.3. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos (NPO) e uma empresa privada

Nesta secção, vamos analisar um caso simples de duopólio de Cournot, onde a competição ocorre entre a NPO e uma única empresa privada. Assim, relativamente ao descrito na secção anterior, estamos a considerar $q_p = 0$ e ignorar (7).

A maximização simultânea de (6) e (8) apresenta os resultados de equilíbrio que se seguem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_{fp}}{\partial q_{fp}} = 0 \\ \frac{\partial V_{np}}{\partial q_{np}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b(2q_{fp} + q_{np}) - c_{fp} = 0 \\ a + b(q_{fp}(\theta - 1) + q_{np}(\theta - 2)) - c_{np} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{q}_{fp} = \frac{(1 - \theta)a - (\theta - 2)c_{fp} + c_{np}}{b(3 - \theta)} & (9) \\ \hat{q}_{np} = \frac{(1 + \theta)a + (1 - \theta)c_{fp} - 2c_{np}}{b(3 - \theta)} & (10) \end{cases}$$

As quantidades óptimas em (9) e (10) indicam, é claro, que mesmo no caso dos custos simétricos ($c_{np} = c_{fp}$), os resultados não serão idênticos, devido à diferença de funções objectivo das empresas. A NPO, para uma determinada eficiência tecnológica, produzirá mais do que a empresa privada ($q_{np} > q_{fp}$), uma vez que apresenta uma preocupação social para o excedente do consumidor que não é mostrada por uma empresa que procura apenas maximizar o seu lucro.

Com efeito, vamos substituir as quantidades (9) e (10) na função de bem-estar social apresentada em (7) (com $q_p = 0$). Maximizando a função resultante de bem-estar \hat{W}_p em relação a θ , obtemos:

$$\frac{\partial \hat{W}_p}{\partial \theta} = \frac{(2a - c_{np} - c_{fp})(a(\theta - 1) + c_{np}(5 - 2\theta) + c_{fp}(\theta - 4))}{b(\theta - 3)^2}. \quad (11)$$

Como $0 \leq \theta \leq 1$, a análise estática resultante de (7) é determinada pelo sinal de

$$-(1 - \theta)a + (5 - 2\theta)c_{np} - (4 - \theta)c_{fp}. \quad (12)$$

A expressão (12) pode tomar qualquer sinal, dependendo da eficiência tecnológica da organização NPO relativamente à empresa privada. Se a organização NPO é tecnicamente pelo menos tão eficiente quanto a empresa privada ($c_{np} \leq c_{fp}$), é fácil de mostrar que a expressão (12) é negativa, e, portanto, a expressão (11) é positiva. Vejamos que, de facto, a expressão (12) é negativa sempre que $c_{np} \leq c_{fp}$. Supondo $\gamma c_{np} < c_{fp}$ e substituindo em (12), vem

$$a(\theta - 1) - c_{np}(2\theta - 5 + \gamma(\theta - 4)) \quad (13)$$

Dado que, no cenário de produção positiva, $a > c_{np}$, resulta que é negativo, se

$$2\theta - 5 + \gamma(4 - \theta) \leq (1 - \theta)$$

o que origina $\gamma \geq 1$. Assim se a NPO for tecnologicamente pelo menos tão eficiente quanto a empresa privada ($c_{np} \leq c_{fp}$), a expressão (13), ou equivalente a expressão (12) é negativa. Assim, podemos concluir que se a NPO é tecnicamente tão eficiente quanto a sua rival privada, o bem-estar social melhora à medida que a NPO apresenta uma maior

preocupação social. Como, neste caso, não há custos de ineficiência, o incentivo para a NPO produzir mais do que a empresa privada levará a uma melhoria do bem-estar social.

Do exposto, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4: Suponhamos que a organização NPO é, pelo menos, tão eficiente quanto a empresa privada ($c_{np} \leq c_{fp}$). À medida que a organização NPO mostra uma maior preocupação social (θ aumenta) o bem-estar social melhora.

Por outro lado, se a NPO é tecnicamente menos eficiente do que a sua rival ($c_{np} > c_{fp}$), como muitos estudos argumentam (por exemplo, (Fizel e Nunnikhoven, 1992) e (Anderson et al., 1999)), há um custo acrescido para as unidades produzidas pela NPO e o bem-estar social pode diminuir à medida que a NPO apresenta uma maior preocupação com os consumidores. Para ilustrar o que acabamos de afirmar, vejamos um exemplo simples: suponhamos que a empresa privada, tem um custo de produção nula e a NPO é tecnicamente menos eficiente, com custos marginais positivos ($c_{np} > c_{fp} = 0$).

Simplificando (12), vemos que $\frac{a(1-\theta)}{(5-2\theta)} < c_{np}$ implica que o bem-estar social irá diminuir

à medida que a NPO apresenta um comportamento mais social (θ aumenta). Por exemplo, se $a = 3c_{np}$, o bem-estar social diminui, qualquer que seja o nível de preocupação social ($0 \leq \theta \leq 1$).

Teorema 5: Suponhamos que a NPO é tecnicamente menos eficiente do que a sua rival privada ($c_{np} \geq c_{fp}$). À medida que a organização NPO apresenta uma maior preocupação social (θ aumenta), o bem-estar social pode piorar.

7.4. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos (NPO) e uma empresa pública

Vamos agora, analisar um duopólio misto de Cournot, onde a competição ocorre entre uma empresa pública e a NPO. Neste caso, estamos, pois, a considerar que a empresa

privada nada produz ($q_{fp} = 0$), e ignoramos o problema de maximização identificada em (6).

Assim, as funções objectivo para a empresa pública e para a NPO são, respectivamente:

$$W_p = (a - b(q_{np} + q_p) - c_p)q_p + (a - b(q_{np} + q_p) - c_{np})q_{np} + \frac{b(q_{np} + q_p + q_{fp})^2}{2}$$

e

$$V_{np} = (a - b(q_{np} + q_p) - c_{np})q_{np} + \frac{\theta b(q_{np} + q_p)^2}{2}$$

Maximizando, simultaneamente, estas funções, com respeito às respectivas quantidades de produção, obtemos os níveis de produção em equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_p}{\partial q_p} = 0 \\ \frac{\partial V_{np}}{\partial q_{np}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b(q_{np} + q_p) - c_p = 0 \\ a + b(q_{np}(\theta - 2) + q_p(\theta - 1)) - c_{np} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{q}_p = \frac{(1 - \theta)a + c_{np} - (2 - \theta)c_p}{b} & (14) \\ \hat{q}_{np} = \frac{\theta a - c_{np} + (1 - \theta)c_p}{b} & (15) \end{cases}$$

Substituindo as quantidades na função W de bem-estar social, obtemos:

$$\hat{W}_p = \frac{a^2 - 2a(\theta c_{np} + c_p(1 - \theta)) + 2c_{np}^2 - 2c_{np}c_p(2 - \theta) + c_p^2(3 - \theta)}{2b}$$

Assim,

$$\frac{\partial \hat{W}_p}{\partial \theta} = \frac{(a - c_p)(c_p - c_{np})}{b}. \quad (16)$$

Da igualdade (16), concluímos que se a NPO aumentar a preocupação social relativamente aos seus clientes, o bem-estar social global melhorará, desde que a NPO seja tecnologicamente mais eficiente do que a empresa pública. De facto, se $c_{np} < c_p$, então

$\frac{\partial \hat{W}_p}{\partial \theta} > 0$. Podemos, então, enunciar o seguinte teorema.

Teorema 6: Suponhamos que a organização NPO é mais eficiente do que a empresa pública. À medida que a NPO apresenta uma maior preocupação social (θ aumenta), o bem-estar social melhora.

Em contraste com o que se afirma neste teorema, vimos atrás, nos teoremas 4 e 5, que quando a NPO compete com uma empresa privada, uma preocupação maior por parte da NPO com os seus clientes pode levar a uma melhoria do bem-estar social, mesmo se a NPO fosse tecnologicamente inferior. Esta possibilidade existia, pois a competição decorria entre uma empresa com alguma preocupação social e uma empresa totalmente privada. No mercado considerado no teorema 6, a competição é diferente, pois a rival da NPO inclui, na sua função objectivo, uma preocupação social global. Neste caso, o aumento da preocupação social por parte da NPO só terá um impacto positivo no mercado, se a NPO tiver um custo de produção inferior do que a empresa pública.

7.5. Concorrência no mercado misto entre uma empresa sem fins lucrativos (NPO), uma empresa privada e uma empresa pública

Neste último caso, vamos supor que todos os três tipos de empresa vão competir no mercado misto à la Cournot.

Assim, vamos maximizar o lucro π_{fp} em ordem à quantidade produzida pela empresa privada, o bem-estar social W_p em ordem à quantidade produzida pela empresa pública e a função objectivo V_{np} em ordem à quantidade produzida pela organização NPO, funções definidas da seguinte forma:

$$\text{Max}_{q_{fp}} \pi_{fp} = \text{Max}_{q_{fp}} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{fp} \right) q_{fp}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_p} W_p &= \text{Max}_{q_p} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_p \right) q_p + \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{np} \right) q_{np} + \\ &+ \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{fp} \right) q_{fp} + \frac{b(q_{np} + q_p + q_{fp})^2}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Max}_{q_{np}} V_{np} = \text{Max}_{q_{np}} \left(a - b(q_{np} + q_p + q_{fp}) - c_{np} \right) q_{np} + \frac{\theta b(q_{np} + q_p + q_{fp})^2}{2}. \quad (8)$$

Resolvendo, então, simultaneamente, os problemas de maximização referidos, obtemos as quantidades \hat{q}_{fp} , \hat{q}_p e \hat{q}_{np} em equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_{fp}}{\partial q_{fp}} = 0 \\ \frac{\partial W_p}{\partial q_p} = 0 \\ \frac{\partial V_{np}}{\partial q_{np}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b(2q_{fp} + q_{np} + q_p) - c_{fp} = 0 \\ a - b(q_{fp} + q_{np} + q_p) - c_p = 0 \\ a - b(q_{fp}(1-\theta) - q_{np}(2-\theta) - q_p(1-\theta)) - c_{np} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{q}_{fp} = \frac{c_p - c_{fp}}{b} \\ \hat{q}_p = \frac{(1-\theta)a + c_{np} - (3-\theta)c_p + c_{fp}}{b} \end{cases} \quad (18)$$

$$\hat{q}_{np} = \frac{\theta a - c_{np} + (1-\theta)c_p}{b} \quad (19)$$

Curiosamente, observamos que a quantidade (17) produzida pela empresa privada não depende dos custos de produção da NPO; e a quantidade (19) produzida pela NPO não depende do custo de produção da empresa privada.

Constatamos também que a empresa privada estará activa ($\hat{q}_{fp} > 0$) apenas se for tecnologicamente mais eficiente do que a empresa pública ($c_{fp} < c_p$).

Notamos ainda que a quantidade (19) produzida pela NPO quando em competição com todas as empresas coincide com a quantidade (15) que produz na ausência da empresa privada, isto é, a NPO não é afectada pela presença da empresa privada. Assim, a variação no bem-estar social W , neste caso, é igualmente dado pela igualdade (16), e, portanto, o Teorema 6 pode ser entendido ao caso mais geral de mercado com os três tipos de empresas aqui considerados.

Teorema 7: À medida que a NPO apresenta uma maior preocupação social (θ aumenta), o bem-estar social melhora, se a NPO for mais eficiente do que a empresa pública ($c_{np} < c_p$), independentemente do custo de produção da empresa privada.

7.6. Conclusão

Neste capítulo, analisamos um ambiente misto de oligopólio, que inclui uma empresa sem fins lucrativos (NPO), uma empresa pública e uma empresa privada. A NPO tem preocupação social na medida em que considera, na sua função objectivo, o excedente do consumidor dos seus clientes. Mostrámos que a eficácia social de uma tal estrutura sem fins lucrativos depende da sua eficiência técnica. Se a NPO é tecnicamente menos eficiente do que a empresa privada ou pública, o bem-estar social total do mercado pode mesmo diminuir, à medida que a NPO apresenta uma maior preocupação social.

Em particular, vimos que, quando em competição com a empresa pública, a NPO deverá ser tecnologicamente superior, ou então o bem-estar social global piora à medida que a NPO apresenta maior preocupação social com os seus clientes.

Este resultado mantém-se válido quando uma empresa privada é incluída no mercado. Mesmo quando a NPO está apenas em competição com uma empresa privada, um aumento da sua preocupação social pode conduzir a uma diminuição do bem-estar social global.

As situações descritas são definidas por condições matemáticas que foram determinadas ao longo do capítulo.

8. Conclusão

Nesta tese, analisámos alguns modelos matemáticos que se inserem na classe de jogos de informação completa, pois o jogador não sabe exactamente quais as escolhas feitas pelos seus oponentes, mas sabe quais os ganhos possíveis decorrentes dessas escolhas. No estudo que desenvolvemos, determinámos as quantidades de equilíbrio para cada um dos modelos e fizemos a análise das vantagens para cada empresa. Fizemos também uma análise das quantidades óptimas produzidas em cada situação.

Dois dos modelos mais conhecidos e importantes na análise do comportamento das empresas são o de Cournot e o de Stackelberg. O equilíbrio de Stackelberg apresenta uma solução mais vantajosa para a empresa líder, comparativamente com o seguimento de uma conduta de acordo com o equilíbrio de Cournot. Isto acontece pois, por um lado a quantidade vendida pela empresa líder é a de monopólio, e por outro, o preço não é excessivamente mais baixo do que o preço de Cournot. No entanto, a quantidade total existente no mercado é maior segundo o equilíbrio de Stackelberg, por comparação com o equilíbrio de Cournot. No modelo de Stackelberg a empresa líder tem a vantagem de ser a primeira e assim a empresa seguidora tem de agir consoante o que a líder fixa. Assim, no primeiro momento, existe vantagem da empresa líder, tendo a seguidora que se sujeitar a essa liderança. Mas, durante quanto tempo estará na disposição de assim permanecer? Se a empresa seguidora tiver a mesma capacidade produtiva que a sua concorrente, então a primeira não irá permanecer na disposição de ser sempre seguidora, uma vez que, embora a líder possa ter-se garantido com um número significativo de consumidores, a opção por uma redução do preço será uma opção estratégica por parte da empresa seguidora. Portanto, se inicialmente o lucro de liderança à Stackelberg é maior do que se as empresas optarem por um comportamento à Cournot, nos momentos subsequentes um comportamento segundo Cournot é sempre mais vantajoso para ambas as empresas, dado que o lucro é superior à posição de liderança à Stackelberg.

Para além destes dois modelos económicos, nesta tese, também analisámos as políticas ambientais em Competição Internacional. Através da análise elaborada mostrámos os efeitos de impostos ambientais e de taxas de importação numa competição internacional entre uma empresa pública e uma empresa privada. Calculámos os valores desses impostos, bem como os níveis de produção de ambas as empresas, de acordo com o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Mostrámos que o excedente do

consumidor, o nível de danos ambientais e o nível do bem-estar social são maiores no país da empresa pública do que no país da empresa privada. Além disso, apresentámos um exemplo numérico que ilustra os resultados referidos e ainda as implicações de um aumento do valor marginal dos danos ambientais.

Nesta tese analisámos também um ambiente misto de oligopólio, que inclui uma empresa sem fins lucrativos (NPO), uma empresa pública e uma empresa privada. A empresa sem fins lucrativos apresenta uma maior preocupação social, na medida em que dá importância, na sua função objectivo, ao excedente do consumidor. Verificámos que se a NPO é tecnicamente menos eficiente do que a empresa privada ou do que a empresa pública, o bem-estar social pode realmente diminuir, se a NPO apresentar uma maior preocupação social para com os seus clientes.

Em particular, vimos que, quando em competição com a empresa pública, a NPO deverá ser tecnologicamente superior, ou então o bem-estar social global piora à medida que a NPO apresenta maior preocupação social com os seus clientes.

Este resultado mantém-se válido quando uma empresa privada é incluída no mercado. Mesmo quando a NPO está apenas em competição com uma empresa privada, um aumento da sua preocupação social pode conduzir a uma diminuição do bem-estar social global.

A análise feita é limitada por uma série de hipóteses simplificadoras, principalmente a procura linear e os pressupostos de custo constante. A flexibilização dessas hipóteses é susceptível de conduzir a resultados interessantes e farão parte de um estudo futuro.

9. Bibliografia

BARROS, F. 1995. Incentive schemes as strategic variables: an application to a mixed duopoly. *International Journal of Industrial Organization*, n.13, pp. 373-386.

BAUMOL, W. and Oates, W. 1998. *The Theory of environmental policy*. Cambridge University Press: Cambridge.

BEATO, P. and MAS-COLELL 1984. The marginal cost pricing as a regulation mechanism in mixed markets. In M. Marchand, P. Pestirau and H. Tulkens (eds.) *The Performance of Public Enterprises*. North-Holland: Amsterdam.

CASE, S., 2005. Purpose and profit go together. *Wall Street Journal (Eastern Edition) New York, May 10*, B.2.

COPELAND, B. R. 1996. Pollution content tariffs, environmental rent shifting, and the control of cross-border pollution. *Journal of International Economics*, n. 40, pp. 459-476.

CORREIA, Tiago B., MUNHOZ Fernando C., BAJAY, Sérgio V. e CORREIA, Paulo B., 2004. *Eficiência Económica e Competição na Indústria Eléctrica Brasileira*.

COURNOT, Augustin. *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*, Paris: Hachette, 1838. (Italian translation in *Biblioteca Dell'Econ.*, 1875. English translation by N. T. Bacon published in *Economic Classics* [Macmillan, 1897] and reprinted in 1960 by Augustus M. Kelly.)

DE FRAJA, G. and DELBONO, F. 1989. Alternatives strategies of a public enterprise in oligopoly. *Oxford Economic Papers*, n. 41, pp. 302-311.

DE FRAJA, G. and DELBONO F. 1990. Game theoretic models of mixed oligopoly. *Journal of Economic Surveys*, n. 4, pp. 1-17.

DU BOIS, C., CAERS, R., JEGERS, M., SCHEPERS, C., DE GIETER, S., PEPERMANS, R., 2004. Agency problems and unrelated business income of non-profit organizations: An empirical analysis. *Applied Economics* 36, 2317–2326.

FERREIRA, Fernanda A. and PINTO, Alberto A. 2007. International duopoly with unknown costs. *PAMM – Proc. Appl. Math. Mech.* 7, 1041307–1041308 (2007) / DOI 10.1002/pamm.200701123. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.

FJELL, K. and HEYHOOD, J. 2002. Public Stackelberg leadership in a mixed oligopoly with foreign firms. *Australian Economic Papers*, n. 41, pp. 267-281.

FJELL, K. and PAL, D. 1996. A mixed oligopoly in the presence of foreign private firms. *Canadian Journal of Economics*, n. 29, pp. 737-743.

GIBBONS, R. (1992). *A Primer in Game Theory*, Pearson Prentice Hall: Harlow.

GOERING, Gregory E., 2007. The strategic use of managerial incentives in a non-profit firm mixed duopoly. *Managerial and Decision Economics* 28, 83–91.

HANSMANN, H., 1987. Economic theories of nonprofit organisations. In: Powell, W.W. (Ed.), *The Nonprofit Sector: A Research*.

JAMES, E., 1983. How nonprofits grow: a model. *Journal of Policy Analysis and Management* 2, 350–366.

LUDEMA, R. D. and I. WOOTON 1994. Cross-border externalities and trade liberalization: the strategic control of pollution. *Canadian Journal of Economics*, n. 27, pp. 950-966.

MATSUMURA, T. 1998. Partial privatization in mixed duopoly. *Journal of Public Economics*, n.13, pp. 473-483.

MIQUE, J., BELANGER, G., 1974. Toward a general theory of managerial discretion. *Public Choice* 17, 27–43.

NASH, J. F., Jr. "Equilibrium Points in n-Person Games," *Proceeding of the National Academy of Science U.S.A.*”, 36, 1950, pp. 48-49. _____. "Non-Cooperative Games. *Annals of Mathematics*," 54, 1951, pp. 289-95.

NISHIMORI, A. and OGAWA, H. 2002. Public monopoly, mixed oligopoly and productive efficiency. *Australian Economic Papers*, n. 41, pp. 185-190.

OHORI, S. 2004. Environmental tax, trade, and privatization. *The Kyoto Economic Review*, v. 2, n.73, pp. 109-120.

PAL, D. and WHITE, M. D. 1998. Mixed oligopoly, privatization, and strategic trade policy. *Southern Economic Journal*, n. 65, pp. 264-281.

SARTINI, Brígida Alexandre; GARBUGIO, Gilmar; SANTOS Humberto José Bortolossi Polyane Alves e BARRETO, Larissa Santana 2004. Uma Introdução à Teoria de Jogos.

SCHIFF, J., WEISBROD, B., 1991. Competition between for-profit and nonprofit organizations in commercial markets. *Annals of Public and Cooperative Economics* 62, 619–639.

SERIZAWA, N. 2000. Optimal trade policy in an international mixed oligopoly. *Seoul Journal of Economics*, n. 13, pp. 107-122.

STACKELBERG H. Von, 1934. *Marktform und Gleichgewicht*, Julius Springer: Vienna.
TÁVORA Rua Gisela Maria Sobral Pinheiro; PINHEIRO Tiago Miguel Magano da Silva.
Assimetria de informação em oligopólios mistos.

WEISBROD, B., 1997. The future of the nonprofit sector: its entwining with private enterprise and government. *Journal of Policy Analysis and Management* 16, 541-551.